Комплексные числа. Начало

Комплексные числа — это числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен -1. Числа x, y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Сопряжённым числом к $z = x + iy$ называют число $\bar{z} = x - iy$.

Модулем числа $z = x+iy$ называют число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Нетрудно заметить, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

1. Докажите, что
(а) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$;
(б) $|z|^2 = z\overline{z}$; $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$.

3. **(а)** Вычислите $\frac{(2-3i)(3+4i)+i+2}{3+i}$
(б) Решите уравнение $x^2 = 24i - 7$
(в) Решите уравнение $(1-i)x^2 - 4x + 1 + 3i = 0$

4. Даны комплексные числа z_1, z_2, такие что $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 z_2 \neq -1$. Докажите, что $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ — вещественное число.

5. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right|$

6. Рассмотрим функцию $F(z) = \frac{z+i}{z-i}$ и последовательность $a_n = F(a_{n-1})$, где $a_0 = 1 + 17i$. Чему равно a_{2024}?

7. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $\operatorname{Re}(a-c)(\overline{c} - \overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|a-b|$.

8. Докажите, что для всех комплексных чисел выполняется как минимум одно из неравенств: $|1+z| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|z^2+1| \geqslant 1$.

9. Пусть $z_1, z_2, \ldots z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого n-угольника. Точка z такова, что

$$\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0.$$

Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.