Правильный многоугольник и векторы

1. **(а)** Дан правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ с центром в точке O. Докажите, что
$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}.$$

(б) Пусть X — произвольная точка плоскости. Чему равна сумма
$$\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}\,?$$

2. Найдите значение выражения
(а) $\sin 9^\circ+\sin 49^\circ+\ldots+\sin 329^\circ$; **(б)** $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

3. Докажите, что в выпуклом n-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

4. Дан правильный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ с центром в точке O и произвольная точка X.
(а) Докажите, что проекции точки X на прямые OA_1, OA_2, $\ldots$, OA_n расположены в вершинах правильного многоугольника. Сколько углов у этого многоугольника?
(б) Точки H_1, H_2, $\ldots$, H_n — проекции X на стороны правильного n-угольника (или на их продолжения). Докажите, что
$$\overrightarrow{XH_1}+\overrightarrow{XH_2}+\ldots+\overrightarrow{XH_n}=\frac{n}{2}\overrightarrow{XO},$$
где O — центр n-угольника.

5. Внутри правильного n-угольника взята точка X, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в красный и синий цвета.
(а) Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.
(б) Докажите, что сумма площадей треугольников с вершиной в точке X и основанием в красных отрезках равна сумме площадей аналогичных синих треугольников.

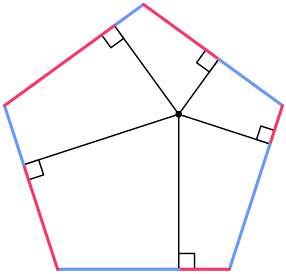

Рис. 1: к задаче 5а

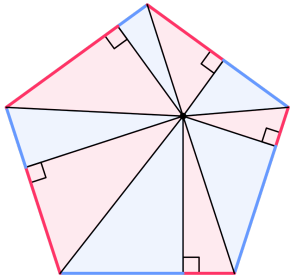

Рис. 2: к задаче 5б

6. **(а)** Правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность с центром O и радиусом R, X — произвольная точка. Докажите, что

$$XA_1^2 + XA_2^2 + \ldots + XA_n^2 = n(R^2 + OX^2).$$

(б) Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного n-угольни вписанного в окружность радиусом R, до произвольной прямой, проходящей через центр многоугольника.

7. В правильный n-угольник вписана окружность с центром в точке O и радиусом r, X — произвольная точка. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до прямых, содержащих стороны n-угольника, равна $n(r^2 + OX^2/2)$.

8. Докажите, что если число n не является степенью простого числа, то существует выпуклый n-угольник со сторонами длиной 1, 2, ..., n, все углы которого равны.