Векторы и скалярное произведение

Линейность скалярного произведения. Для любых векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \alpha(\vec{u}, \vec{w}).$$

В частности, это позволяет считать квадрат длины отрезка:

$$|\vec{u}|^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{v}|^2 + 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2.$$

Важный факт. Если $(\vec{u},\ \vec{v}) = 0$, то либо векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны, либо один из них равен $\vec{0}$.

Совет. Если вы решаете задачу с помощью векторов, то часто бывает удобно выразить все векторы через векторы с началом в одной точке. В этом случае для краткости можно сократить обозначения: вместо $\overrightarrow{OA}$ писать просто $\vec{A}$.

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Докажите, что $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.

2. Дано 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.

3. В остроугольном треугольнике ABC через вершину A проведена прямая ℓ, перпендикулярная медиане AM. Продолжения высот из вершин B и C пересекают прямую ℓ в точках X и Y. Докажите, что $AX = AY$.

4. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

5. **(а)** Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

(б) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$, где R — радиус окружности (ABC).

(в) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точка H_a — ортоцентр треугольника BCD, точки H_b, H_c, H_d определяются аналогично. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

6. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до вершин треугольника минимальна, если X — точка пересечения медиан треугольника.

7. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот двух других треугольников.

8. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2\ldots A_8$ такой, что

$$\angle A_1A_4A_5 = \angle A_2A_5A_6 = \ldots = \angle A_7A_2A_3 = \angle A_8A_3A_4 = 90^\circ\,.$$

Докажите, что восьмиугольник можно вписать в окружность.

9. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$, D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

10. Дано множество точек O, A_1, A_2, $\ldots$, A_n на плоскости. Расстояние между любыми двумя из этих точек является квадратным корнем из натурального числа. Докажите, что существуют такие векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, что для любой точки A_i выполняется равенство $\overrightarrow{OA_i} = m\vec{u} + n\vec{v}$, где m и n — некоторые целые числа.