# Тренировочная олимпиада

**1.** В олимпиаде по математике было 10 задач. За каждую задачу Ваня получил хотя бы 1 балл. Он утверждает, что среднее арифметическое его баллов за любые несколько (хотя бы две) подряд идущих задач — нецелое число. Могли ли его слова оказаться правдой? Балл за каждую задачу — натуральное число от 1 до 7.

**2.** В компании некоторые пары людей являются друзьями (дружба взаимна). Известно, что если двое людей не являются друзьями, то они имеют ровно двух общих друзей. В этой компании нашлись двое друзей $A$ и $B$, у которых нет общих друзей. Докажите, что у $A$ и $B$ поровну друзей.

**3.** Биссектриса угла $ABD$ пересекает основание $AD$ равнобокой трапеции $ABCD$ в точке $L$. Точки $K$ и $N$ на отрезках $AC$ и $CD$ выбраны соответственно так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки $B$, $C$, $K$, $N$ лежат на одной окружности.

**4.** Положительные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Докажите, что $4x + y + z \geqslant 2$.

**5.** В таблице $20 \times 20$ отмечено 180 клеток таким образом, что никакие четыре из них не образуют квадрат $2 \times 2$. Докажите, что можно отметить ещё одну клетку с сохранением этого условия.