Тренировочная олимпиада. Решения

1. В олимпиаде по математике было 10 задач. За каждую задачу Ваня получил хотя бы 1 балл. Он утверждает, что среднее арифметическое его баллов за любые несколько (хотя бы две) подряд идущих задач — нецелое число. Могли ли его слова оказаться правдой? Балл за каждую задачу — натуральное число от 1 до 7.

Ответ. Могли.

Решение. Пусть Ваня получил такие баллы: $1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2$. Среди любых $n \geqslant 2$ подряд идущих чисел в этой последовательности есть как единицы, так и двойки. Значит, их сумма больше n, но меньше $2n$, поэтому их среднее арифметическое больше 1, но меньше 2. Таким образом, оно не является целым.

2. В компании некоторые пары людей являются друзьями (дружба взаимна). Известно, что если двое людей не являются друзьями, то они имеют ровно двух общих друзей. В этой компании нашлись двое друзей A и B, у которых нет общих друзей. Докажите, что у A и B поровну друзей.

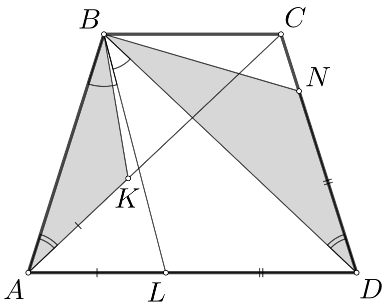
Решение. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — все друзья A, кроме B (возможно, $n = 0$). Так как у A и B нет общих друзей, то B и C_i не являются друзьями ни при каком i, $1 \leqslant i \leqslant n$, поэтому B и C_i имеют ровно двух общих друзей. Один из этих общих друзей — A, а второго обозначим D_i. Заметим, что $D_i \neq D_j$ при $i \neq j$, так как иначе A и D_j, не дружащие друг с другом (снова в силу отсутствия у A и B общих друзей), имеют как минимум трёх общих друзей C_i, C_j и B, что противоречит условию. Значит, помимо A, у B как минимум n друзей. Таким образом мы доказали, что друзей у B не меньше, чем у A. Меняя в рассуждении A и B местами, получим, что у A друзей не меньше, чем у B. Отсюда следует, что друзей у A и B поровну, что и требовалось.

3. Биссектриса угла ABD пересекает основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD выбраны соответственно так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности.

Решение. Так как BL — биссектриса в треугольнике ABD, то

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AL}{LD} = \frac{AK}{DN}.$$

Так как в равнобокой трапеции $\angle BAC = \angle BDC$, то отсюда и из равенства $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DN}$ получаем, что треугольники ABK и DBN подобны.



Значит,
$$\angle BKC = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle DNB = \angle BNC,$$
что и доказывает вписанность четырёхугольника $BCNK$.

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию
$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$
Докажите, что $4x + y + z \geqslant 2$.

Решение. Выразим x из данного равенства:
$$x = \frac{1 - yz}{y + z + yz},$$
после чего подставим полученное выражение в неравенство, которое нужно доказать:
$$\frac{4 - 4yz}{y + z + 2yz} + y + z \geqslant 2.$$
Умножив неравенство на положительное выражение $y + z + 2yz$ и приведя подобные, получим следующее неравенство, эквивалентное исходному:
$$4 + y^2 + z^2 + 2y^2z + 2yz^2 \geqslant 2y + 2z + 6yz.$$
Ясно, что
$$1 + y^2 \geqslant 2y \quad \text{и} \quad 1 + z^2 \geqslant 2z,$$
а по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх чисел имеем
$$y^2z + yz^2 + 1 \geqslant 3yz.$$
Умножая это неравенство на 2 и складывая с двумя предыдущими, получаем требуемое.

5. В таблице 20×20 отмечено 180 клеток таким образом, что никакие четыре из них не образуют квадрат 2×2. Докажите, что можно отметить ещё одну клетку с сохранением этого условия.

Решение. Предположим, утверждение задачи неверно, то есть к каждой неотмеченной клетке примыкает уголок из трёх отмеченных. Для каждой из $400 - 180 = 220$ неотмеченных клеток рассмотрим квадрат 2×2, который она образует вместе с тремя соседними отмеченными клетками (если для какой-то клетки таких квадратов несколько, выберем любой из них). Ясно, что все 220 таких квадратов различны. В каждом из этих квадратов рассмотрим по две стороны неотмеченной клетки, примыкающие к отмеченным клеткам — всего их $220 \cdot 2 = 440$.

Так как $180 \cdot 2 = 360 < 440$, то найдётся отмеченная клетка A, к которой примыкают хотя бы три рассмотренные стороны, являющиеся границами неотмеченных клеток B, C и D. Без ограничения общности B и C примыкают к противоположным сторонам клетки A — но тогда в одном из квадратов 2×2, содержащих клетки A и D, содержится неотмеченная клетка B, а в другом — C. Получили противоречие, так что утверждение задачи верно.