Комбинаторный разнобой

1. В файл A записаны 1014 попарно различных положительных чисел. В файл B записаны все произведения ab , где a и b — два различных числа из файла A (если для нескольких пар результат совпадает, то он записывается в файл B ровно один раз; таким образом, все числа в файле B попарно различны). Какое наименьшее количество чисел может содержать файл B?

2. На клетчатой плоскости живут 20 жуков. Каждый жук разделил количество жуков в своей строке на количество жуков в своем столбце (и там, и там жук учитывает сам себя). Могли ли у всех жуков получиться разные числа?

3. Дано целое число $n > 1$. Доску $n \times n$ раскрасили шахматным образом в белый и черный цвет. *Фигурой* назовем любой непустой набор различных клеток доски. Фигуры F_1 и F_2 назовем подобными, если F_1 можно получить из F_2 с помощью поворота относительно центра доски на угол кратный 90° и параллельного переноса. (Любая фигура подобна самой себе.) Найдите наибольшее возможное значение k такое, что для любой связной фигуры F, состоящей из k клеток, найдутся фигуры F_1, F_2 подобные F, что в F_1 белых клеток больше, чем черных, а в F_2 белых клеток меньше, чем черных.

4. Тренер выстроил в ряд 200 волейболистов и раздал им m мячей (каждый волейболист мог получить сколько угодно мячей). Время от времени один из волейболистов кидает мяч другому (а тот ловит). Через некоторое время оказалось, что из любых двух волейболистов левый кидал правому мяч ровно два раза, а правый левому ровно один раз. При каком наименьшем m это возможно?

5. В сети находятся 100 компьютеров, некоторые из которых соединены проводами, при этом проводов ровно 2024. Докажите, что компьютеры можно разбить на 50 пар так, что:

(а) Среди них не более 20 пар, соединённых проводом;

(б) Среди них не менее 23 пар, соединённых проводом;

(в) Среди них ровно 22 пары, соединённых проводом.

6. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечетно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании

7. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

8. Родители на день рождения готовят Кате в подарок таблицу размером $n \times n$ ($n \geqslant 2$), заполненную натуральными числами, не превосходящими n. Табличка должна быть красивой, поэтому числа в каждой строке и каждом столбце должны стоять в порядке неубывания (слева направо и снизу вверх соответственно). Назовем две клетки, у которых есть общая сторона *доминошкой.* Катя очень не любит, когда в клетках доминошки написаны равные числа. Помогите родителям и найдите наименьшее возможное количество доминошек, в которых написаны равные числа.

9. Даша переставила числа от 1 до $2n+1$ в каком-то порядке. Юра стремится отгадать, в каком порядке стоят числа у Даши. Для этого он выписывает k перестановок чисел от 1 до $2n+1$. Затем Даша для каждой из Юриных перестановок сообщает, какие числа в её перестановке стоят левее, чем в Юриной, какие — правее, а какие — на тех же местах. При каком наименьшем k Юра наверняка сможет узнать, в каком порядке стоят числа у Даши?

10. В очень большом Городе строят метро: много станций, некоторые пары которых соединены тоннелями, причем от любой станции можно добраться по тоннелям до любой другой. Все тоннели метро требуется разбить на «линии»: каждая линия состоит из нескольких последовательных тоннелей, все станции в которых различны (в частности, линия не должна быть кольцевой); допускаются и линии, состоящие из одного тоннеля. По закону требуется, чтобы от любой станции до любой другой можно было доехать, сделав не более 100 пересадок с линии на линию. При каком наибольшем N любое связное метро с N станциями можно разбить на линии, соблюдая закон?