Тренировочная олимпиада

1. Про положительные числа x, y, z известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Докажите, что среди чисел $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ одно равно сумме двух других.

2. На плоскости дана прямая и 101 точка, причем расстояние от любой точки до прямой не превосходит 1, а расстояние между любыми двумя точками не менее 2. Докажите, что какие-то две точки находятся на расстоянии более 85.

3. Имеется набор из 200 карточек: по 100 красных и синих. По кругу сидят 100 игроков. Каждому из них раздали две одноцветные карточки. Каждую минуту каждый игрок передает соседу слева одну красную карточку, а если это невозможно, то одну синюю карточку. Докажите, что через несколько минут у всех игроков будут разноцветные карточки.

4. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $AB < AC$, провели высоты BE и CF. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке P, а прямая, параллельная BC, проходящая через A, пересекает прямую EF в точке Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из точки A.

5. Пусть x, y – целые числа. Последовательность $\{a_n\}$ определяется так:

$$a_0 = a_1 = 0, \;\; a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n + 1$$

для целых неотрицательных n. Докажите, что для простых p верно, что НОД(a_p, a_{p+1}) либо равен 1, либо больше $\sqrt{p}$.