Тренировочная олимпиада. Решения

1. Про положительные числа x, y, z известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Докажите, что среди чисел $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ одно равно сумме двух других.

Решение. Представим это равенство как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - 2x(y+z) + (y^2 + z^2 - 2yz) = 0.$$

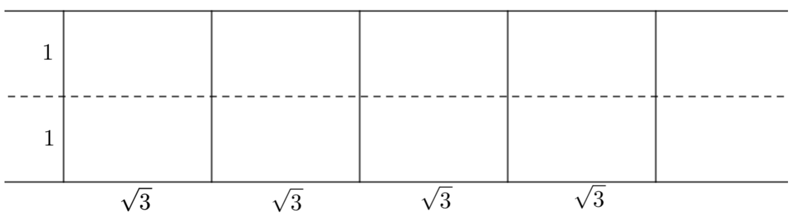
Его дискриминант

$$D = (-2y - 2z)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz) = 16yz,$$

поэтому $x = y + z \pm 2\sqrt{yz}$, то есть $(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$, откуда следует требуемое.

2. На плоскости дана прямая и 101 точка, причем расстояние от любой точки до прямой не превосходит 1, а расстояние между любыми двумя точками не менее 2. Докажите, что какие-то две точки находятся на расстоянии более 85.

Решение. Понятно, что все точки расположены внутри полосы, образованной двумя параллельными нашей прямыми на расстоянии 1 от неё. Расположим нашу полосу горизонтально, и будем ставить вертикальные столбики длины 2 начиная с самой левой точки и на расстоянии $\sqrt{3}$ друг от друга (см. рисунок).



Отметим, что диагональ прямоугольника $1 \times \sqrt{3}$ равна 2, то есть если внутри или на границе него есть две точки, то это только противоположные вершины (так как он вписан в окружность с диаметром 2). Поэтому, если смотреть на два таких прямоугольника, образующие прямоугольник $2 \times \sqrt{3}$, то внутри них или на границе может быть максимум 3 точки, причём если их 3, то это вершины: две крайние на одной вертикальной стороне и средняя на другой.

Пронумеруем столбики числами, начиная с 0. Для каждого вертикального столбика будем смотреть за количеством точек, которые строго левее него; обозначим это количество через $f(n)$, где n — номер столбика. Тогда $f(0) = 0$ и $f(n+1) \leqslant f(n) + 2$. Тогда $f(50) \leqslant 2 \cdot 50 = 100$, то есть в 51-м столбике или правее него должна быть хотя бы одна точка. Но тогда расстояние между этой точкой и самой левой точкой будет как минимум $\sqrt{3} \cdot 50 > 1{,}7 \cdot 50 = 85$.

3. Имеется набор из 200 карточек: по 100 красных и синих. По кругу сидят 100 игроков. Каждому из них раздали две одноцветные карточки. Каждую минуту каждый игрок передает соседу слева одну красную карточку, а если это невозможно, то одну синюю карточку. Докажите, что через несколько минут у всех игроков будут разноцветные карточки.

Решение. Будем обозначать КК, СС, КС людей, у которых две красных, две синих и разноцветные карточки соответственно. В любой момент времени сидящих за столом можно разбить на последовательные блоки однотипных (в блоке может быть и один человек). Посмотрим, что со временем происходит с красными блоками (где все КК) и с синими блоками (где все СС).

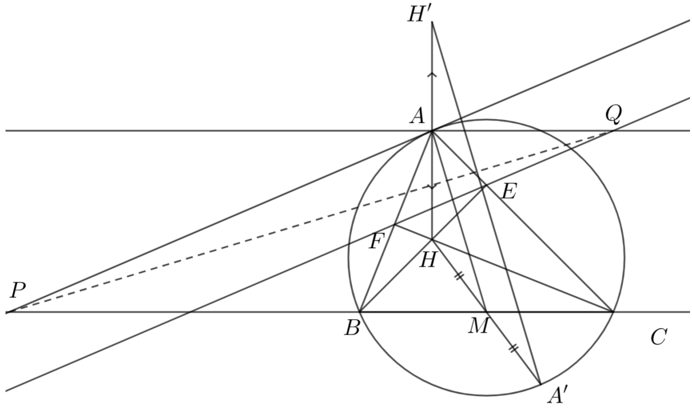
Заметим, что каждый блок КК не может расшириться влево (так как человек, который не КК, не может им стать: если у человека была хотя бы одна синяя карточка, то и останется хотя бы одна синяя карточка). При этом, самый правый либо остается КК, либо становится КС, в зависимости от того, кем ограничен этот блок справа. Таким образом, общее количество КК либо уменьшается, либо остается таким же, но в последнем случае все КК остаются на своем месте.

Синий же блок точно «теряет» самого правого человека, ведь он получит красную карточку. А влево он может расшириться, а может нет: зависит от того, кем ограничен этот блок слева. Тогда количество СС либо уменьшается, либо остается таким же, но в последнем случае все блоки СС «сдвигаются» на 1 влево.

Таким образом, если вдруг в какой-то момент количество КК перестало уменьшаться (а это значит, что и количество СС перестало уменьшаться, ведь всего синих и красных карточек поровну), то все красные блоки должны застыть на месте, а синие постепенно двигаться по кругу. Это, очевидно, невозможно. А, значит, количество КК будет постоянно уменьшаться, пока не достигнет нуля. И в этот момент у всех станут разноцветные карточки, что и требовалось.

4. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $AB < AC$, провели высоты BE и CF. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке P, а прямая, параллельная BC, проходящая через A, пересекает прямую EF в точке Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из точки A.

Решение 1. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, A' — точка, диаметрально противоположная A в (ABC), M — середина стороны BC, H' — точка, симметричная H относительно A. Как известно, точки H и A' симметричны относительно M. Отрезок AM — средняя линия треугольника $HH'A'$, поэтому достаточно доказать, что $H'A' \perp PQ$.



Треугольники AFE и ACB подобны (так как $BFEC$ — вписанный с диаметром BC). Так как $\angle QAC = \angle ACB = \angle AFE$, то AQ — касательная к (AEF), то есть точки P и Q — соответствующие точки в подобных треугольниках, ведь и там, и там это пересечение касательной в вершине A и противоположной стороны.

Тогда AP/AQ равно коэффициенту подобия этих треугольников, как и отношение диаметров описанных окружностей AH/AA'. Таким образом

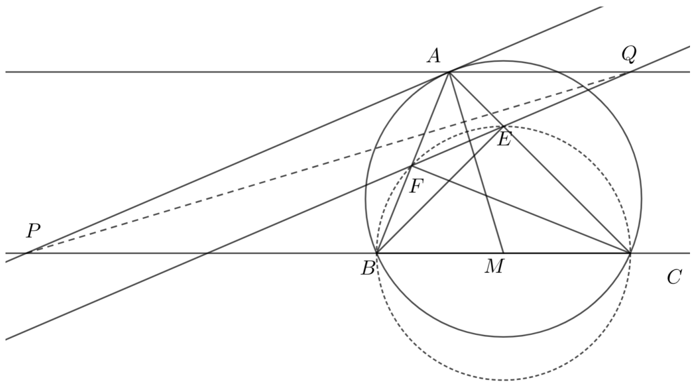
$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AH}{AA'} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AH} = \frac{AP}{AA'} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AH'} = \frac{AP}{AA'}.$$

Заметим, что

$$\angle PAQ = 90^\circ + \angle PAH = 90^\circ + \text{вертикальный ему угол} = \angle H'AA'.$$

Последнее равенство следует из того, что диаметр AA' перпендикулярен касательной AP. Тогда треугольники PAQ и $H'AA'$ подобны по углу и отношению прилежащих сторон. Их соответствующие стороны AH' и AQ перпендикулярны, значит, перпендикулярны и $A'H'$ с PQ. Что мы и хотели доказать.

Решение 2.



Рассмотрим три окружности: (ABC), $(BFEC)$ и (A) — окружность с центром A и радиусом 0. Степень точки X относительно A считается равной по определению

$pow_{(A)}(X) = AX^2 - 0^2$. А это позволяет находить радикальную ось для точки и окружности.

Заметим, что прямая BC — радикальная ось окружностей (ABC), $(BFEC)$, прямая AP, как касательная — радикальная ось окружностей (ABC) и (A). Тогда P — радикальный центр этой тройки окружностей; в частности, через неё пройдет радикальная ось (A) и $(BFEC)$.

Докажем, что Q также лежит на этой радикальной оси. Действительно, $QA^2 = QE \cdot QF$ из-за того, что QA касается (AEF) $(\angle QAC = \angle ACB = \angle AFE)$. Таким образом PQ — радикальная ось (A) и $(BFEC)$ Радикальная ось перпендикулярна линии центров окружностей, значит $PQ \perp AM$.

5. Пусть x, y — целые числа. Последовательность $\{a_n\}$ определяется так:

$$a_0 = a_1 = 0, \;\; a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n + 1$$

для целых неотрицательных n. Докажите, что для простых p верно, что НОД$(a_p, a_{p+}$ либо равен 1, либо больше $\sqrt{p}$.

Решение. Предположим, что НОД$(a_p, a_{p+1}) \neq 1$ при некотором p, то есть у него есть простой делитель — обозначим его q. Посмотрим на последовательность остатков a_n при делении на q. Заметим, что остаток каждого члена последовательности однозначно определяется остатками двух предыдущих, поэтому последовательность остатков периодическая. Поскольку $a_0 \equiv a_1 \equiv a_p \equiv a_{p+1} \pmod q$, то последовательность периодична без предпериода.

Тогда её минимальный период должен делить p, то есть он равен либо 1, либо p. Период не может быть равен 1, поскольку последовательность остатков не постоянна, так как $a_2 = 1 \not\equiv 0 \pmod q$.

Поэтому минимальный период равен p, а все пары подряд идущих остатков от (a_0, a_1) до (a_{p-1}, a_p), которых p, различны (иначе нашелся бы период длины меньше, чем p). Всего возможных пар остатков q^2, поэтому $q^2 \geqslant p$. Учитывая, что p простое, то $q^2 > p$, то есть НОД$(a_p, a_{p+1}) \geqslant q > \sqrt{p}$.

Тренировочная олимпиада

1. В олимпиаде по математике было 10 задач. За каждую задачу Ваня получил хотя бы 1 балл. Он утверждает, что среднее арифметическое его баллов за любые несколько (хотя бы две) подряд идущих задач — нецелое число. Могли ли его слова оказаться правдой? Балл за каждую задачу — натуральное число от 1 до 7.

Ответ. Могли.

Решение. Пусть Ваня получил такие баллы: $1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2$. Среди любых $n \geqslant 2$ подряд идущих чисел в этой последовательности есть как единицы, так и двойки. Значит, их сумма больше n, но меньше $2n$, и поэтому не может быть целой.

2. В компании некоторые пары людей являются друзьями (дружба взаимна). Известно, что если двое людей не являются друзьями, то они имеют ровно двух общих друзей. В этой компании нашлись двое друзей A и B, у которых нет общих друзей. Докажите, что у A и B поровну друзей.

Решение. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — все друзья A, кроме B (возможно, $n = 0$). Так как у A и B нет общих друзей, то B и C_i не являются друзьями ни при каком i, $1 \leqslant i \leqslant n$, поэтому B и C_i имеют ровно двух общих друзей. Один из этих общих друзей — A, а второго обозначим D_i. Заметим, что $D_i \neq D_j$ при $i \neq j$, так как иначе A и D_j, не дружащие друг с другом (снова в силу отсутствия у A и B общих друзей) имеют как минимум трёх общих друзей C_i, C_j и B, что противоречит условию. Значит, помимо A, у B как минимум n друзей. Таким образом мы доказали, что друзей у B не меньше, чем у A. Меняя в рассуждении A и B местами, получим, что у A друзей не меньше, чем у B. Отсюда следует, что друзей у A и B поровну, что и требовалось.

3. Биссектриса угла ABD пересекает основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD выбраны соответственно так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности.

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Докажите, что $4x + y + z \geqslant 2$.

5. В таблице 20×20 отмечено 180 клеток таким образом, что никакие четыре из них не образуют квадрат 2×2. Докажите, что можно отметить ещё одну клетку с сохранением этого условия.