Диагностическая работа. Очный этап. Решения

1. Алёна и Маша нашли чашечные весы и набор с гирьками. Когда они отсортировали гирьки по массе, то выяснилось, что всего в наборе 5 типов гирек. Затем они заметили, что если взять любые две гирьки из набора и поставить их на левую чашу весов, то всегда найдутся ещё две другие гирьки из набора такие, что если их поставить на правую чашу весов, то весы будут в равновесии. Какое наименьшее число гирек может быть в наборе?

Ответ: 13 гирек.

Решение. Пусть гирьки в наборе имеют веса $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. По условию есть хотя бы одна гирька каждого веса. Возьмём гирьки весов a_1 и a_2 и положим их на левую чашу весов. Для того, чтобы уравновесить весы гирьками из этого набора, нужно положить на правую чашу гирьки весов a_1 и a_2. Значит, в наборе хотя бы по две гирьки каждого из весов a_1 и a_2. Аналогично получим, что в наборе должно быть хотя бы две гирьки каждого из весов a_4 и a_5.

Если положить на левую чашу весов две гирьки веса a_1, то, чтобы уравновесить весы, на правую чашу нужно положить ещё две гирьки веса a_1. Получается, что в наборе должно быть хотя бы четыре гирьки веса a_1. Аналогично получаем, что в наборе должно быть хотя бы четыре гирьки веса a_5.

Таким образом, в наборе хотя бы 13 гирек. Легко привести пример подходящего набора из 13 гирек: 4 гирьки веса 1, 2 гирьки веса 2, 1 гирька веса 3, 2 гирьки веса 4, 4 гирьки веса 5. Несложно видеть, что пример подходит.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ — перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, 2025$. Какое максимальное число точных квадратов может быть среди чисел

$$a_1^2 + a_2,\ a_2^2 + a_3,\ a_3^2 + a_4,\ \ldots,\ a_{2024}^2 + a_{2025},\ a_{2025}^2 + a_1?$$

Ответ: 1012 чисел.

Решение. Заметим, что если $a_i^2 + a_{i+1}$ является точным квадратом, то $a_{i+1} \geqslant 2a_i+1$, поскольку $a_i^2+a_{i+1} \geqslant (a_i+1)^2$. Тогда из того, что $a_{i+1} \leqslant 2025$, получаем, что $a_i \leqslant 1012$. Таким образом, среди рассматриваемых чисел не более 1012 квадратов.

Приведём пример, когда их ровно 1012. Пусть $a_1 = 1$. Далее будем строить последовательность по следующему правилу:

- если $a_i \leqslant 1012$, то $a_{i+1} = 2a_i + 1$;
- если $a_i > 1012$, то a_{i+1} — наименьшее число, отличное от $a_1, a_2, \ldots, a_i$.

Докажем, что никакие два числа в последовательности не повторятся. Предположим противное, рассмотрим пару $a_j = a_k$ такую, что $j < k$ и $j + k$ —

минимально. Тогда, если $a_{j-1}, a_{k-1} \leqslant 1012$, то $a_j = 2a_{j-1}+1$, а $a_k = 2a_{k-1}+1$. Получаем, что $a_{j-1} = a_{k-1}$, что противоречит минимальности $j+k$. Значит одно из этих чисел больше 1012. Если $a_{k-1} > 1012$, то a_k по построению не равно никакому из предыдущих чисел. То есть, $a_k \neq a_j$. Если же $a_{j-1} > 1012$, то a_j по построению меньше всех последующих чисел, следовательно, $a_j < a_k$, противоречие. Таким образом, построенная последовательность — это перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, 2025$.

Докажем, что квадратов среди сумм будет ровно 1012. По построению после каждого числа $a \leqslant 1012$ следует число $2a+1$, кроме, может быть, случая, когда $a = a_{2025} \leqslant 2025$. Покажем, что $a_{2025} > 1012$. Пока в последовательности не встречаются все числа, не превосходящие 1012, числа, большие 1012, не могут идти подряд. Но последовательность начинается с чисел $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$. Таким образом, если $a_{2025} \leqslant 1012$, то среди первых 2024 чисел последовательности 1013 чисел больших 1012, а значит хотя бы столько же чисел не превосходящих 1012, то есть получится хотя бы 2026 чисел, противоречие. Следовательно, $a_{2025} > 1012$ и квадрат среди сумм ровно 1012.

3. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что a^2-1 делится на $ab+1$.

Ответ: $a=1$, b любое, $b=1$, a любое.

Решение. Заметим, что поскольку a^2-1 делится на $ab+1$, то и

$$(a^2-1)+ab+1 = a^2+ab = a(a+b)$$

делится на $ab+1$. Поскольку a и $ab+1$ взаимно просты, то $a+b$ делится на $ab+1$, откуда $a+b \geqslant ab+1$, что равносильно неравенству $(1-a)(b-1) \geqslant 0$. Поскольку a и b — натуральные числа, то одно из них должно быть равно 1, другое число при этом может быть любым. Легко видеть, что такие пары подходят.

4. Около треугольника ABC описана окружность Ω. На дуге AC окружности Ω, не содержащей точку B, выбрана точка E, а на стороне AC — точка D, так, что $\angle ABD = \angle CBE$. Серединный перпендикуляр к отрезку BD пересекает Ω в точках P и Q. Докажите, что ортоцентр треугольника PQE лежит на прямой AC.

Решение. Обозначим вторую точку пересечения прямой BD с Ω через X. Проведём через точку E прямую, перпендикулярную PQ. Пусть она пересекается с прямой AC в точке H, с прямой PQ — в точке Y, с Ω вторично — в точке Z.

Из равенства углов $\angle ABD = \angle CBE$ следует, что дуги AX и CE равны, следовательно, прямые AC и XE параллельны. Тогда четырёхугольник $XDHE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно параллельны. Трапеция $BXEZ$ вписанная, следовательно, она равнобедренная. Тогда $BDHZ$ — также равнобедренная трапеция.

Поскольку PQ — серединный перпендикуляр к основанию этой трапеции, то он также проходит через середину другого основания, то есть $HY = YZ$. Получается, что в треугольнике EPQ проведена высота из вершины E до

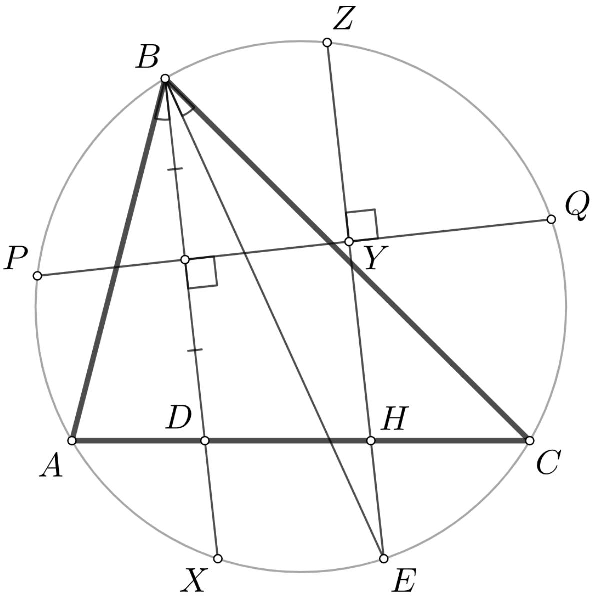

Рис. 1: к решению задачи 4

пересечения с его описанной окружностью, точка H симметрична пересечения Z относительно стороны PQ. Из леммы об отражении ортоцентра следует, что H — ортоцентр треугольника EPQ. Следовательно, ортоцентр треугольника PQE лежит на прямой AC.

5. Дано натуральное число $m \geqslant 3$ и бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая соотношению

$$a_{n+2} = 2\sqrt[m]{a_{n+1}^{m-1} + a_n^{m-1}} - a_{n+1}$$

для всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $a_1 < 2^m$.

Решение. Предположим, что $a_1 \geqslant 2^m$. Докажем индукцией по k, что для любого $k \geqslant 1$ выполнено неравенство $a_{2k+1} < a_1$. Докажем базу индукции для $k = 1$:

$$a_3 < a_1 \;\Leftrightarrow\; a_3 + a_2 < 2\sqrt[m]{a_2^{m-1} + a_1^{m-1}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (a_3 + a_2)^m = 2^m\left(a_2^{m-1} + a_1^{m-1}\right) \leqslant a_1\left(a_2^{m-1} + a_1^{m-1}\right) < (a_2 + a_1)^m.$$

Докажем переход. Пусть $a_{2k+1} < a_1$. Докажем, что $a_{2k+3} < a_1$.

$$\left(a_{2k+3} + a_{2k+2}\right)^m = 2^m\left(a_{2k+2}^{m-1} + a_{2k+1}^{m-1}\right) < a_1\left(a_{2k+2}^{m-1} + a_1^{m-1}\right) < \left(a_{2k+2} + a_1\right)^m.$$

Получаем, что $a_{2k+3} < a_1$. Таким образом, переход доказан.

Поскольку последовательность бесконечна и состоит из натуральных чисел, то найдутся такие $i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1}$, что

$$a_{2i_1+1} = a_{2i_2+1} = \ldots = a_{2i_{m+1}+1} = x, \quad a_{2i_2+3} = \ldots = a_{2i_{m+1}+3} = y$$

(так как упорядоченных пар натуральных чисел, меньших a_1, конечное число). Тогда каждое из чисел $a_{2i_1+2}, a_{2i_2+2}, \ldots a_{2i_{m+1}+2}$ является корнем многочлена

$$P(t) = (y+t)^m - 2^m(t^{m-1} + x^{m-1}).$$

Так как корней у этого многочлена не больше m, то какие-то два из чисел $a_{2i_1+2}, a_{2i_2+2}, \ldots a_{2i_{m+1}+2}$ совпадают. Не умаляя общности можно считать, что $a_{2i_1+2} = a_{2i_2+2}$. Но по трём последовательным элементам последовательности вся последовательность восстанавливается однозначно. Это означает, что последовательность периодична. Пусть d — длина периода. Тогда $a_1 = a_{2d+1}$, противоречие. Получаем, что $a_1 < 2^m$.

6. Алексей и Антон играют в игру на клетчатой доске $(2n+1)\times(2n+1)$. Алексей ходит первым. В начале игры все клетки доски покрашены в белый цвет. Алексей каждым своим ходом красит одну из белых клеток в зелёный цвет, а Антон каждым своим ходом красит одну из белых клеток в красный цвет. Игра заканчивается, когда все клетки доски закрашены. Алексей выигрывает, если фигура, состоящая из зелёных клеток связна, то есть от любой зелёной клетки можно дойти до любой другой зелёной клетки, двигаясь только по зелёным клеткам (из клетки можно попасть только в одну из 8 соседних с ней клеток). В противном случае выигрывает Антон. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Обозначим игрока, который ходит первым через A, а игрока, который ходит вторым — через B. Легко видеть, что при $n = 1$ игрок A выигрывает, закрасив центральную клетку в зелёный цвет. Рассмотрим случай $n > 1$. Пусть первым ходом A закрасил клетку с координатами (i, j). Тогда игрок B находит самую дальнюю от этой клетки угловую клетку (не умаляя общности, будем считать, что самым дальним углом является клетка $(1, 1)$) и красит в красный цвет соседнюю с ней по диагонали клетку (то есть клетку $(2, 2)$).

Далее B разбивает клетки на пары, как показано на рисунке 3. Если A закрашивает в зелёный цвет любую из выделенных клеток, B следующим ходом закрашивает её пару в зелёный цвет. Если A закрашивает какую-нибудь другую клетку, то B закрашивает любую клетку, кроме клетки $(1, 1)$.

Поскольку A ходит последним, то он будет вынужден закрасить клетку $(1, 1)$. Таким образом, B выиграет, поскольку клетки $(1, 1)$ и (i, j) несвязны. Действительно, никакая связная цепочка зелёных клеток, начинающаяся с $(1, 1)$, не может выбраться из первой строки или первого столбца. Пусть связная цепочка зелёных клеток с началом в $(1, 1)$ попала во вторую строку нашей доски (случай со вторым столбцом разбирается аналогично) и клетка $(2, k)$ — первая клетка этой цепи во второй строке ($k > 2$). Тогда все клетки от $(2, 2)$ до $(2, k-1)$ покрашены в красный цвет. Следовательно, согласно нашей стратегии все клетки, начиная с $(1, 1)$ до $(1, k-2)$, покрашены в зелёный цвет.

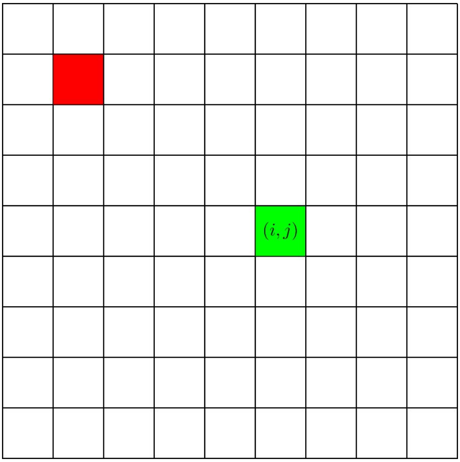

Рис. 2: к решению задачи 6

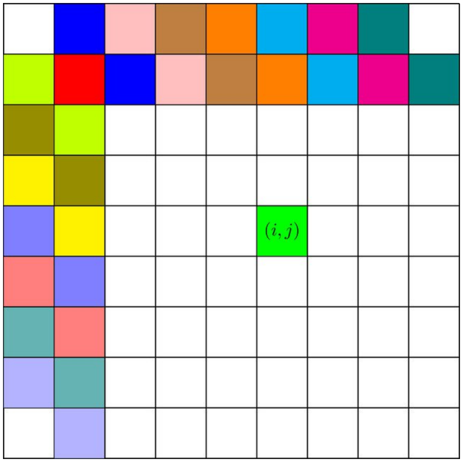

Рис. 3: к решению задачи 6

Но поскольку $(2,k)$ покрашена в зелёный цвет, то парная ей клетка $(1,k-1)$ покрашена в красный цвет (см. рисунок 4). Но тогда зелёные клетки $(1,k-2)$ и $(2,k)$ не связаны друг с другом. Противоречие.

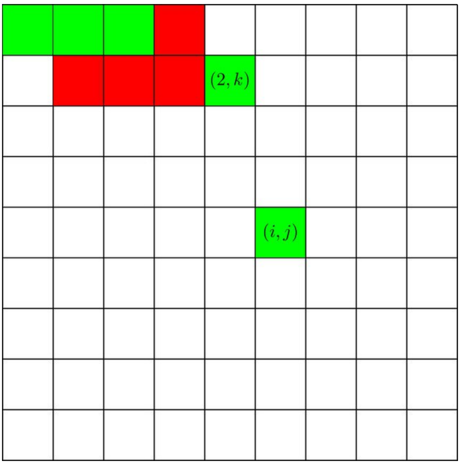

Рис. 4: к решению задачи 6