Геометрический разнобой

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите AB/BC.

2. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E такая, что углы ABD и EBC равны. Окружность с центром O проходит через точки D и E и касается прямой AD в точке D. Докажите, что точка O равноудалена от точек A и C.

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведённые через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведённую через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведённая через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведённой через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

4. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

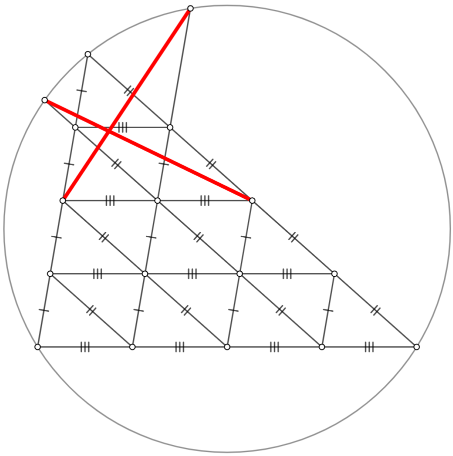
5. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2\ldots A_8$ такой, что

$$\angle A_1A_4A_5 = \angle A_2A_5A_6 = \ldots = \angle A_7A_2A_3 = \angle A_8A_3A_4 = 90^\circ\,.$$

Докажите, что восьмиугольник можно вписать в окружность.

6. Точки H и M — ортоцентр остроугольного треугольника ABC и середина стороны BC соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно MH, пересекает стороны AB и AC в точках X и Y. Докажите, что H — середина отрезка XY.

7. Докажите, что красные отрезки равны.



8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На лучах AC и DC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = AB$ и $DQ = DB$. Докажите, что прямая PQ проходит через отражение вершины B относительно прямой AD.

9. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC через ортоцентр H проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть X — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BDH и HEC. Докажите, что описанная окружность треугольника AHX касается биссектрисы угла BAC.

10. На стороне CD фиксированного выпуклого пятиугольника $ABCDE$ выбирается переменная точка X. Точки K и L на отрезке AX таковы, что $AB = BK$ и $AE = EL$. Окружности, описанные около треугольников CXK и DXL, вторично пересекаются в точке Y. Докажите, что все прямые XY, полученные при различных положениях точки X, либо проходят через фиксированную точку, либо параллельны друг другу.