Алгебраический разнобой

1. Пусть n — натуральное число. Докажите, что $a(n) = n^5 + 5^n$ делится на 11 если и только если $b(n) = n^5 \cdot 5^n + 1$ делится на 11.

2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy?

3. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства:

$$P(b+c) = P(a),\ \ P(c+a) = P(b),\ \ P(a+b) = P(c)$$

4. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$, для которых существуют две перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ такие, что $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ последовательные натуральные числа.

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие равенству

$$P(x + P(x)) = x^2 P(x)$$

для любого вещественного x.

6. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют равенствам $a^2 = b^3 + ab$ и $c^3 = a + b + c$. Докажите, что $a = bc$.

7. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n натуральное число. Известно, что числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$ и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2018)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

8. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c, хотя бы одно из чисел

$$a^3 b + 1,\ b^3 c + 1,\ c^3 a + 1$$

не делится на $a^2 + b^2 + c^2$.

9. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа такие, что $a + b + c \geqslant 3$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Докажите, что

$$a + b + c \leqslant 2\sqrt{abc} + 1.$$

10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии (в некотором порядке)?