Дистанционный отбор. Решения

Задача 1.1. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 97$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{42} = 5$.

Ответ: 500.

Решение. Заметим, что из равенства

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4}$$

следует, что $a_i = a_{i+4}$ для всех $i = 1, 2, \ldots 96$.

Обозначим $k = |a_i - a_{i+1}|$. Тогда, так как $a_1 < a_2 < a_3$, то $a_2 = a_1 + k$, а $a_3 = a_1 + 2k$. При этом мы знаем, что $a_5 = a_1$, а так как a_4 отличается от a_3 и от a_5 ровно на k, то $a_4 = a_1 + k$. Таким образом, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 4k$.

Из-за того, что $a_i = a_{i+4}$, понимаем, что $a_{42} = a_{38} = \ldots = a_2 = a_1 + k$. То есть, $a_1 + k = 5$ и сумма любых четырёх подряд идущих чисел равна $4a_1 + 4k = 20$. Разобьём числа $a_1, \ldots, a_{100}$ на блоки по 4 подряд идущих. Получим 25 блоков, сумма чисел в которых равна 20. Тогда итоговая сумма $25 \cdot 20 = 500$. □

Задача 1.2. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 97$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{34} = 6$.

Ответ: 600.

Задача 1.3. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 97$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{62} = 3$.

Ответ: 300.

Задача 1.4. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ известно, что

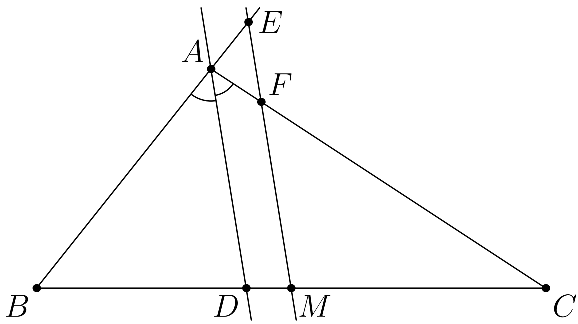
- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 97$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{66} = 7$.

Ответ: 700.

Задача 2.1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD (D лежит на BC). Точка M — середина отрезка BC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку M, пересекает прямую AB в точке E и отрезок AC в точке F. Известно, что $AB = 7$ и $AC = 10$. Чему равно BE?

Ответ: 8,5.



Решение. По свойству биссектрисы

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{7}{10},$$

значит, если $BD = 14x$, то $DC = 20x$, а $BC = 34x$. M — середина BC, поэтому $BM = 17x$.

Так как $AD \parallel EM$, по теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{BE}{AB} = \frac{BM}{BD}$. Значит,

$$BE = \frac{BM \cdot AB}{BD} = \frac{17x \cdot 7}{14x} = \frac{17}{2} = 8{,}5.$$

□

Задача 2.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD (D лежит на BC). Точка M — середина отрезка BC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку M, пересекает прямую AB в точке E и отрезок AC в точке F. Известно, что $AB = 6$ и $AC = 9$. Чему равно BE?

Ответ: 7,5.

Задача 2.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD (D лежит на BC). Точка M — середина отрезка BC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку M, пересекает прямую AB в точке E и отрезок AC в точке F. Известно, что $AB = 7$ и $AC = 12$. Чему равно BE?

Ответ: 9,5.

Задача 2.4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD (D лежит на BC). Точка M — середина отрезка BC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку M, пересекает прямую AB в точке E и отрезок AC в точке F. Известно, что $AB = 8$ и $AC = 13$. Чему равно BE?

Ответ: 10,5.

Задача 3.1. В классе 15 девочек, 16 учеников имеют темные волосы, 17 — кареглазые и 18 отличников. Новый учитель математики, зная, сколько учеников в классе, но не видев класс, смог точно сказать, что там учится кареглазая темноволосая девочка-отличница. Какое наибольшее количество человек может учиться в этом классе?

Ответ: 21.

Решение. Пусть в классе учится x детей. Уберём из них сначала мальчиков, потом всех не темноловолосых, потом всех не кареглазых, а в конце всех не отличников. На первом шагу мы уберём максимум $x - 15$ учеников, потом не более $x - 16$ учеников, потом не более $x - 17$ и в конце не более $x - 18$ учеников. Значит, если остался хотя бы один ученик, то он будет кареглазой темноволосой девочкой-отличницей. То есть, если

$$x - 15 + x - 16 + x - 17 + x - 18 < x,$$

то такая девочка найдётся. Аналогично можно показать в обратную сторону, что если это неравенство не выполняется, то у в классе может быть $x - 15$ мальчиков, из оставшихся может быть $x - 16$ не темноловолосых и так далее. Тогда получится, что все или мальчики, или не темноволосые, или не кареглазые, или не отличники.

Таким образом, ответом является наибольшее x, для которого неравество выполняется. Перенесем все x влево, а все числа — вправо. Получим, что $3x < 66$, то есть $x < 22$. Значит, наибольшее подходящее $x = 21$. $\square$

Задача 3.2. В классе 18 девочек, 19 учеников имеют темные волосы, 20 — кареглазые и 21 отличников. Новый учитель математики, зная, сколько учеников в классе, но не видев класс, смог точно сказать, что там учится кареглазая темноволосая девочка-отличница. Какое наибольшее количество человек может учиться в этом классе?

Ответ: 25.

Задача 3.3. В классе 21 девочек, 22 учеников имеют темные волосы, 23 — кареглазые и 24 отличников. Новый учитель математики, зная, сколько учеников в классе, но не видев класс, смог точно сказать, что там учится кареглазая темноволосая девочка-отличница. Какое наибольшее количество человек может учиться в этом классе?

Ответ: 29.

Задача 3.4. В классе 24 девочек, 25 учеников имеют темные волосы, 26 — кареглазые и 27 отличников. Новый учитель математики, зная, сколько учеников в классе, но не видев класс, смог точно сказать, что там учится кареглазая темноволосая девочка-отличница. Какое наибольшее количество человек может учиться в этом классе?

Ответ: 33.

Задача 4.1. Сколько существует натуральных чисел m, для которых числа m и $m + 2^{151}$ имеют нечётное количество делителей?

Ответ: 75.

Решение. У натурального числа n все делители разбиваются на пары, дающие в произведении n. Такое разбиение не получится сделать в том и только в том случае, когда в пару с делителем a должно пойти само a, то есть, когда n — полный квадрат. Значит, числа m и $m+2^{151}$ должны быть полными квадратами.

Введём обозначение $m = x^2$, $m + 2^{151} = y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Количество подходящих m равно количеству подходящих натуральных x. Подставив первое равенство во второе, получим

$$x^2 + 2^{151} = y^2 \Leftrightarrow 2^{151} = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Следовательно, $y-x$ и $y+x$ — делители 2^{151}, поэтому они имеют вид 2^k и 2^l соответственно, причём $k+l=151$ и $k<l$. Тогда

$$\begin{cases} y-x=2^k, \\ y+x=2^l, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=\dfrac{2^l+2^k}{2}, \\ x=\dfrac{2^l-2^k}{2}. \end{cases}$$

Чтобы x и y были натуральными необходимо и достаточно, чтобы 2^k и 2^l были одной чётности (при этом x будет натуральным, потому что $k<l$), что выполняется, если $k \neq 0$.

Значит, нам подойдут все такие k, что

$$151-k>k>0 \;\Leftrightarrow\; 151>2k>0.$$

Подходящих k ровно 75. При этом каждому k соответствует ровно один x и очевидно, что все такие x различны. $\square$

Задача 4.2. Сколько существует натуральных чисел m, для которых числа m и $m+2^{351}$ имеют нечетное количество делителей?

Ответ: 175.

Задача 4.3. Сколько существует натуральных чисел m, для которых числа m и $m+2^{551}$ имеют нечетное количество делителей?

Ответ: 275.

Задача 4.4. Сколько существует натуральных чисел m, для которых числа m и $m+2^{751}$ имеют нечетное количество делителей?

Ответ: 375.

Задача 5.1. Про приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами известно, что $P(P(-1))=P(P(-2))=0$ и $P(-1)\neq P(-2)$. Чему равно $P(0)$?

Ответ: -3.

Решение. Пусть $P(x)=x^2-bx+c$. По теореме Виета сумма корней $P(x)$ равна b, а их произведение — c. Из условия $P(-1)$ и $P(-2)$ — корни P, поэтому

$$\begin{cases} P(-1)+P(-2)=b, \\ P(-1)P(-2)=c. \end{cases}$$

Подставим $x = -1$ и $x = -2$ в $P(x)$, получим: $P(-1) = 1+b+c$, $P(-2) = 4+2b+c$. Подставив эти значения в первое уравнение и преобразовав, получим $b+c = -\frac{5}{2}$.

Подставив $P(-1)$ и $P(-2)$ во второе уравнение, получим

$$(1+b+c)(4+2b+c) = c \Leftrightarrow \left(1-\frac{5}{2}\right)\left(4+2\cdot\frac{-5}{2}-c\right) = c,$$

откуда $c = -3$. Так как $P(0) = c$, то $P(0) = -3$. □

Задача 5.2. Про приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами известно, что $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ и $P(1) \neq P(2)$. Чему равно $P(0)$?

Ответ: $-1{,}5$.

Задача 6.1. Карлсон очень любит варенье, однако недавно он был вынужден сесть на диету. По рекомендации врача диета должна длиться 100 дней и подчиняться следующим правилам:

- на k-ый день диеты Карлсон может есть ровно k банок варенья, либо не есть вовсе;
- если Карлсон поест на k-ый день, то он не сможет есть в течение последующих $k-1$ дней.

Сколько максимум банок варенья может съесть Карлсон на протяжении диеты?

Ответ: 197.

Решение. Попытаемся переформулировать условие. Если в k-ый день Карлсон ест варенье, то он не должен есть варенье в дни $k+1, k+2, \ldots 2k-1$. Это условие равносильно тому, что Карлсон не может есть варенье и в день a, и в день b, если a и b отличаются менее, чем в 2 раза. Действительно, если $a < b < 2a$, то $b - a \leqslant a - 1$, что противоречит нашему условию, и обратно, если $2a \leqslant b$, то $b - a > a - 1$, что удовлетворяет нашему условию.

Назовём последовательность дней $k_1, k_2, \ldots k_n$ *допустимой*, если Карлсон может есть варенье в эти дни и при этом все рекомендации врача соблюдаются. Другими словами, последовательность допустима тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, 2, \ldots n-1$ верно, что $2k_i \leqslant k_{i+1}$.

Назовём последовательность дней *лучшей*, если для этой последовательности $k_1 + \ldots + k_n$ — максимальное среди всех допустимых последовательностей.

Рассмотрим лучшую последовательность (или одну из лучших). Пусть $k_n \neq 100$. Тогда $k_n < 100$, но тогда $2k_{n-1} \leqslant k_n < 100$. Тогда мы можем просто заменить k_n на 100 и последовательность останется допустимой, но Карлсон получит больше варенья, то есть наша последовательность не была лучшей. Значит, $k_n = 100$. Аналогичными рассуждениями несложно видеть, что $k_i = \left\lfloor \frac{k_{i+1}}{2} \right\rfloor$ (предполагаем противное, получаем, что $2k_i$ строго меньше k_{i+1}, то есть $k_i < \left\lfloor \frac{k_{i+1}}{2} \right\rfloor$, но тогда можем заменить k_i на $\left\lfloor \frac{k_{i+1}}{2} \right\rfloor$ и последовательность останется допустимой, но Карлсон получит больше варенья).

При этом, если $k_1 > 1$, то последовательность не лучшая, потому что можно дописать в начало 1 и так как $k_1 \leqslant 2 = 2 \cdot 1$, то последовательность останется допустимой.

Значит, лучшая последовательность единственна и равна $1, 3, 6, 12, 25, 50, 100$ (последний член равен 100, а каждый предыдущий равен $\left\lfloor \frac{k_{i+1}}{2} \right\rfloor$).

В сумме получаем 197 банок варенья. □

Задача 6.2. Карлсон очень любит варенье, однако недавно он был вынужден сесть на диету. По рекомендации врача диета должна длиться 200 дней и подчиняться следующим правилам:

- на k-ый день диеты Карлсон может есть ровно k банок варенья, либо не есть вовсе;
- если Карлсон поест на k-ый день, то он не сможет есть в течение последующих $k - 1$ дней.

Сколько максимум банок варенья может съесть Карлсон на протяжении диеты?

Ответ: 397.

Задача 6.3. Карлсон очень любит варенье, однако недавно он был вынужден сесть на диету. По рекомендации врача диета должна длиться 400 дней и подчиняться следующим правилам:

- на k-ый день диеты Карлсон может есть ровно k банок варенья, либо не есть вовсе;
- если Карлсон поест на k-ый день, то он не сможет есть в течение последующих $k - 1$ дней.

Сколько максимум банок варенья может съесть Карлсон на протяжении диеты?

Ответ: 797.

Задача 6.4. Карлсон очень любит варенье, однако недавно он был вынужден сесть на диету. По рекомендации врача диета должна длиться 120 дней и подчиняться следующим правилам:

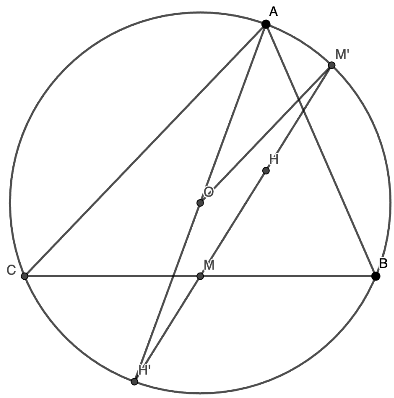
- на k-ый день диеты Карлсон может есть ровно k банок варенья, либо не есть вовсе;
- если Карлсон поест на k-ый день, то он не сможет есть в течение последующих $k-1$ дней.

Сколько максимум банок варенья может съесть Карлсон на протяжении диеты?

Ответ: 236.

Задача 7.1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 13$, $OH = 5$. Чему равно BC?

Ответ: 24.



Решение. Так как $OA = OM'$, то точка M' лежит на окружности ω, описанной около треугольника ABC. Обозначим через H' точку, симметричную H относительно M. Как известно, H' также будет лежать на ω.

Треугольник $OM'H'$ равнобедренный, с основанием $H'M'$. Тогда и $OM = OH$ в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к $H'M'$. Тогда

$$BC = 2BM = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 2\sqrt{13^2 - 5^2} = 24.$$

□

Задача 7.2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 17$, $OH = 8$. Чему равно BC?

Ответ: 30.

Задача 7.3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 25$, $OH = 24$. Чему равно BC?

Ответ: 14.

Задача 7.4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 20$, $OH = 16$. Чему равно BC?

Ответ: 24.

Задача 8.1. Обозначим через a_k остаток от деления $(k+1)^3$ на k^3. Чему равен остаток от деления $a_1 + a_2 + \ldots + a_{52025}$ на 1000?

Ответ: 525.

Решение. Заметим, что при $k \geqslant 4$ выполнено неравенство

$$k^3 < (k+1)^3 < 2k^3,$$

поэтому при $k \geqslant 4$ выполняется $a_k = (k+1)^3 - k^3$. При $k < 4$ значения легко вычисляются: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 10$.

Таким образом, искомая сумма по модулю 1000 равна

$$0 + 3 + 10 + (5^3 - 4^3) + (6^3 - 5^3) + \ldots + (52026^3 - 52025^3) \equiv 13 - 4^3 + 26^3 \equiv 525.$$

$\square$

Задача 8.2. Обозначим через a_k остаток от деления $(k+1)^3$ на k^3. Чему равен остаток от деления $a_1 + a_2 + \ldots + a_{42024}$ на 1000?

Ответ: 574.

Задача 8.3. Обозначим через a_k остаток от деления $(k+1)^3$ на k^3. Чему равен остаток от деления $a_1 + a_2 + \ldots + a_{32023}$ на 1000?

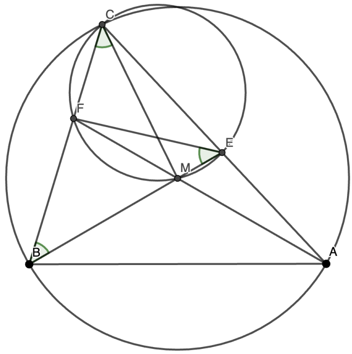
Ответ: 773.

Задача 8.4. Обозначим через a_k остаток от деления $(k+1)^3$ на k^3. Чему равен остаток от деления $a_1 + a_2 + \ldots + a_{22022}$ на 1000?

Ответ: 116.

Задача 9.1. Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 47^\circ$ и $\angle ABC = 73^\circ$. На сторонах AC и BC выбрали точки E и F соответственно так, что $\angle ABE = \angle BAF = 30^\circ$. Чему равен угол BEF (ответ дайте в градусах)?

Ответ: 43°.



Решение. Обозначим через M точку пересечения отрезков BE и AF. Треугольник BMA равнобедренный с углом 120° при вершине M. Аналогичным свойством обладает треугольник AOB, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. Поэтому треугольники AMB и AOB равны, то есть M совпадает с O.

Углы EMF и ECF в сумме дают 180°, поэтому четырёхугольник $CFME$ вписанный. Тогда

$$\angle BEF = \angle BCM = \angle CBM = \angle ABC - \angle ABM = 43^\circ.$$

□

Задача 9.2. Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 52^\circ$ и $\angle ABC = 68^\circ$. На сторонах AC и BC выбрали точки E и F соответственно так, что $\angle ABE = \angle BAF = 30^\circ$. Чему равен угол BEF (ответ дайте в градусах)?

Ответ: 38°.

Задача 9.3. Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 43^\circ$ и $\angle ABC = 77^\circ$. На сторонах AC и BC выбрали точки E и F соответственно так, что $\angle ABE = \angle BAF = 30^\circ$. Чему равен угол BEF (ответ дайте в градусах)?

Ответ: 47°.

Задача 9.4. Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 56^\circ$ и $\angle ABC = 64^\circ$. На сторонах AC и BC выбрали точки E и F соответственно так, что $\angle ABE = \angle BAF = 30^\circ$. Чему равен угол BEF (ответ дайте в градусах)?

Ответ: 34°.

Задача 10.1. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 11 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 1024.

Решение. Рассмотрим все возможные конфигурации горящих лампочек. Каждой конфигурации сопоставим набор чисел, состоящий из номеров горящих лампочек, считая от левой стены. Заметим, что Ваня не может отличить две конфигурации тогда и только тогда, когда соответствующие наборы совпадают с точностью до сдвига всех значений на одно и то же число. Тогда для подсчета количества различимых конфигураций можно считать, что во всех них первая горящая лампочка имеет номер 1 (иначе сдвинем все числа в конфигурации так, чтобы номер первой горящей лампочки стал единицей). Каждая из оставшихся десяти лампочек может либо гореть, либо не гореть: всего есть $2^{10} = 1024$ варианта. При этом все соответствующие конфигурации будут различимыми, так как мы уже не можем сдвигать числа в наборе — изменится номер первой горящей лампочки.

Значит, Ваня сможет различить 1024 комбинации лампочек. $\square$

Задача 10.2. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 9 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 256.

Задача 10.3. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 12 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 2048.

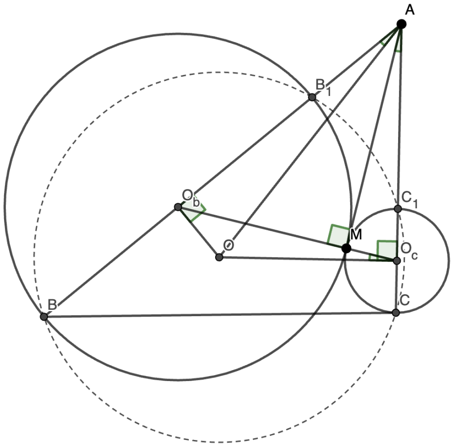
Задача 10.4. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 10 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 512.

Задача 11.1. Дан треугольник ABC. Окружность ω с центром в точке O проходит через B и C и во второй раз пересекает отрезки AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Известно, что окружности с диаметрами BB_1 и CC_1 касаются друг друга внешним образом в точке M. Найдите AO, если $AB = 8$, $AC = 5$ и $AM = 4$?

Ответ: 5,125.



Решение. Обозначим окружности, построенные на BB_1 и CC_1 как на диаметрах, через Ω_b и Ω_c, а их центры — через O_b и O_c соответственно. Точка A является радикальным центром окружностей ω, Ω_b и Ω_c. Значит AM — касательная к окружностям Ω_b и Ω_c, а также $AB_1 = \frac{AM^2}{AB}$, $AC_1 = \frac{AM^2}{AC}$.

Поскольку O — точка пересечения серединных перпендикуляров к BB_1 и CC_1, то $\angle OO_bA = \angle OOc_A = 90°$. Значит, точки O, O_b, A, O_C лежат на одной окружности, и верно равенство

$$\angle O_bAO = \angle O_bO_cO = 90° - \angle O_bO_cA = \angle MAO_c.$$

Тогда прямоугольные треугольники O_bAO и MAO_c подобны по двум углам, следовательно,

$$AO = AO_c \cdot AO_b \cdot \frac{1}{AM} = \left(\frac{AB + AB_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{AC + AC_1}{2}\right) \cdot \frac{1}{AM}.$$

Окончательно получаем

$$AO = \left(\frac{8 + \frac{4^2}{8}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5 + \frac{4^2}{5}}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = 5{,}125.$$

□

Задача 11.2. Дан треугольник ABC. Окружность ω с центром в точке O проходит через B и C и во второй раз пересекает отрезки AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Известно, что окружности с диаметрами BB_1 и CC_1 касаются друг друга внешним образом в точке M. Найдите AO, если $AB = 16$, $AC = 10$ и $AM = 8$?

Ответ: 10,25.

Задача 12.1. Какое наибольшее количество элементов из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 512\}$ можно выбрать так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел a и b и любого натурального числа числа k число $a^k + b^k$ не делилось бы на 512?

Ответ: 129.

Решение. Оценка. Заметим, что нельзя выбрать два чётных числа, так как иначе для этих чисел и $k = 9$ получится противоречие.

Рассмотрим пары нечётных чисел $(1, 511)$, $(3, 509)$, $\ldots(255, 257)$. Из каждой пары можно выбрать не более одного числа, так как иначе для этих чисел и $k = 1$ получится противоречие. Всего пар $\frac{255+1}{2} = 128$, поэтому нельзя выбрать больше 128 нечётных чисел. Итого можно выбрать не больше одного чётного, и не больше 128 нечётных чисел, то есть всего не больше 129 чисел.

Пример. Выберем число 2, и все числа вида $4m + 1$, где $m = 0, \ldots, 127$ (то есть все числа дающие остаток 1 при делении на 4).

- Если в качестве a и b выбрать одно чётное и одно нечётное число, то для любого натурального k число $a^k + b^k$ будет нечётным.
- Если в качестве a и b выбрать два нечётных числа, то $a^k + b^k$ будет сравнимо с $1^k + 1^k = 2$ по модулю 4, то есть не будет делиться на 512.

Таким образом, пример подходит. □

Задача 12.2. Какое наибольшее количество элементов из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 1024\}$ можно выбрать так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел a и b и любого натурального числа числа k число $a^k + b^k$ не делилось бы на 1024?

Ответ: 257.

Задача 12.3. Какое наибольшее количество элементов из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2048\}$ можно выбрать так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел a и b и любого натурального числа числа k число $a^k + b^k$ не делилось бы на 2048?

Ответ: 513.

Задача 12.4. Какое наибольшее количество элементов из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 4096\}$ можно выбрать так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел a и b и любого натурального числа числа k число $a^k + b^k$ не делилось бы на 4096?

Ответ: 1025.