

Программа зачёта, 2024-12

Ко всем вопросам прикреплена ссылка либо на листик в Хеопсе (и первой, и второй групп), где есть разбор, либо на другое место с разбором.

Во всех теоретических вопросах, где не указано обратное, нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Теорема Безу, теорема Виета, кратность корня. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Многочлен нечётной степени имеет корень. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Следствие из теоремы Безу для многочлена с целыми коэффициентами. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
4. Интерполяционный многочлен Лагранжа. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
5. Показатели. Периодичность остатков с периодом равным показателю. Делимость функции Эйлера на показатель. [Сириус.Курсы](#)
6. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Произведения вычетов и невычетов. Критерий Эйлера. Квадратичный закон взаимности (без док-ва). Формулы для символов Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. [Разбор](#)
7. Лемма Туэ. Рождественская теорема Ферма. [Разбор](#)
8. Многочлены над конечным полем \mathbb{F}_p . Теорема Безу. Количество корней многочлена с учетом кратности не превосходит его степени. Теорема Виета. [Разбор](#)
9. Лемма об уточнении показателя. [Группа 1](#), [Группа 2](#)

Геометрия

1. Степень точки относительно окружности, радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Признаки описанности четырёхугольника, 6 случаев. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Изогональное сопряжение. Принадлежность одной окружности проекций на стороны треугольника пары изогонально сопряжённых точек. [Группа 1](#), [Группа 2](#)

4. Лемма об изогоналях, вырожденные случаи (без доказательства). Доказательство леммы об изогоналях для параллелограмма. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
5. Задача 255. Прямая Симсона (любые доказательства этих фактов).
6. Прямые Гаусса и Обера, их перпендикулярность. [Сириус.Курсы 1](#), [Сириус.Курсы 2](#)
7. Поворотная гомотетия. Поворотная гомотетия, переводящая один данный отрезок в другой, построение её центра. Точка Микеля. Поворотная гомотетия, переводящая одну из двух данных пересекающихся окружностей в другую. Точка велосипедистов. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
8. Леммы о воробьях. [Статья в Кванте](#)
9. Инверсия. Образ прямых и окружностей при инверсии. Касающиеся объекты. Изменение длин отрезков при инверсии. Сохранение углов при между обобщёнными окружностями. Гомотетичность инверсных окружностей. Существование инверсии, которая переводит непересекающиеся окружности в концентрические. Доказательство леммы Архимеда с помощью инверсии в середине дуги. [Сириус.Курсы 1](#), [Сириус.Курсы 2](#)
10. Композиция гомотетий, теорема о трёх колпаках. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
11. Полувписанная окружность, принадлежность I прямой, соединяющей точки касания полувписанной окружности со сторонами угла. [Группа 1](#), [Группа 2](#)

Комбинаторика

1. Формула Эйлера для планарного графа. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$. Существование в планарном графе вершины степени не больше 5. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Теорема Турана. Число независимости графа. Эквивалентная формулировка теоремы Турана через число независимости графа. Доказательство теоремы Турана с помощью клонирования вершин. [Разбор](#)
3. Лемма Холла. Два доказательства леммы Холла: методом чередующихся цепей и индукцией с выкидыванием критического множества. Лемма Холла с дефицитом. Лемма Холла для арабских стран. [Разбор](#)
4. Хроматическое число графа. Хроматическое число дерева, полного графа, двудольного графа. Связь хроматического числа и числа неза-

висимости графа. Оценка на хроматическое число планарного графа $\chi(G) \leq 5$. [Разбор](#)

5. Определение чисел Каталана через правильные скобочные последовательности. Вывод явной формулы (через количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n)). [Группа 1](#), [Группа 2](#)

Задачи

Алгебра

1. Полина записала на доску 2024 числа. После этого она увеличила каждое число на 1, и произведение чисел не изменилось. Затем она снова увеличила каждое из чисел на 1, и произведение все еще осталось тем же самым. Такая процедура повторялась k раз, и каждый раз произведение сохранялось. Чему равно максимально возможное k ? [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Докажите, что если у бесконечной последовательности есть периоды с длинами m и n , то у неё есть период длины $\text{НОД}(m, n)$. [Разбор](#)
4. Докажите, что $3^n - 2^n$ не может делиться на n ни для какого натурального $n > 1$. [Разбор](#)
5. Решите уравнение в натуральных числах: $4xy - x - y = z^2$. [Разбор](#)
6. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ имеют вид $2^{n+2}x + 1$, где $x \in \mathbb{N}$. [Разбор](#)
7. Конечно ли множество неприводимых многочленов над \mathbb{F}_p ? [Разбор](#)

Геометрия

1. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки $C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2$ соответственно. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2, B_1B_2C_1C_2, C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что все 6 отмеченных точек лежат на одной окружности. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Точка P лежит вне окружностей ω_1 и ω_2 . Пусть ℓ_1 — прямая, проходящая через точки касания касательных из P к ω_1 , аналогично определим

прямую l_2 , и обозначим как Q точку пересечения прямых l_1 и l_2 . Докажите, что середина отрезка PQ лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2 .

[Разбор](#)

3. Дан треугольник ABC . На прямых AB , AC , BC выбраны точки C_1 , B_1 , A_1 соответственно. Докажите, что окружности (AB_1C_1) , (A_1BC_1) , (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.
Эту задачу нужно рассказывать в направленных углах. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , AC , AB в точках D , E , F соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и AEF пересекаются в K . Докажите, что KD — биссектриса угла BKC . [Разбор](#)
5. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку X , пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках N_1 и N_2 , и окружности, описанные около треугольников ABX и CDX , в точках M_1 и M_2 . Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$. [Сириус.Курсы](#)
6. Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что окружность (AEF) касается внеписанной окружности треугольника ABC со стороны BC . [Сириус.Курсы](#)
7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Точки E и F — проекции D на стороны AC и AB соответственно. Прямая AD вторично пересекает окружность (ABC) в точке T , а прямая EF пересекает (ABC) в точках P и Q . Докажите, что точка D является центром вписанной окружности треугольника PQT . [Разбор](#)
8. Докажите, что прямая, соединяющая середину стороны BC треугольника ABC с центром его вписанной окружности ω , высекает на высоте, проведённой из вершины A , отрезок, равный радиусу ω . [Группа 1](#), [Группа 2](#)

Комбинаторика

1. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i; j)$ и добавить по фишке в узлы $(i + 1; j)$ и $(i; j + 1)$ при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел. Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей сум-

мой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми. [Группа 1](#), [Группа 2](#)

2. (а) Докажите, что в регулярном двудольном графе есть 1-фактор (паросочетание, в котором участвуют все вершины графа).
(б) Докажите, что регулярный двудольный граф разбивается на 1-факторы. [Сириус.Курсы](#)
3. Докажите, что если в любом подграфе графа есть вершина степени не больше d , то его можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет. [Сириус.Курсы](#), начиная с 6:00
4. Из n -мерного бинарного куба удалили две противоположные вершины. Для каких натуральных n оставшиеся вершины можно разбить на пары смежных вершин? [Группа 1](#), [Группа 2](#)