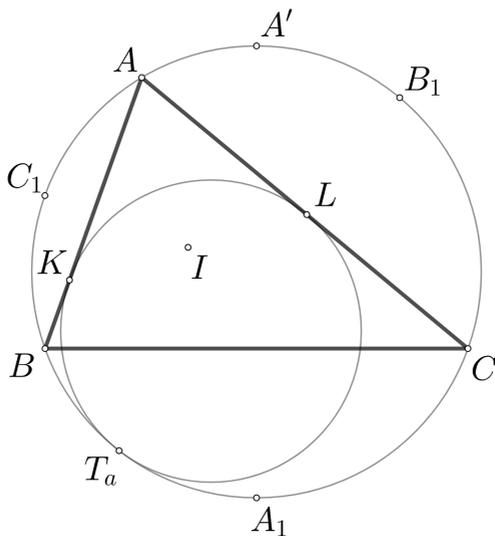


Полувписанная окружность

Во всех задачах используются следующие обозначения. Дан треугольник ABC .

- ω и Ω — вписанная и описанная окружность соответственно;
- I — центр ω ;
- A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB окружности Ω соответственно;
- A' — середина дуги BAC окружности Ω .

Полувписанной будем называть окружность, которая касается отрезков AB, AC и Ω . Обозначим точки касания через K, L, T_a соответственно. Аналогично можно определить точки T_b и T_c .



Напоминание. В листике про композицию гомотетий доказывалось, что прямые AT_a, BT_b, CT_c пересекаются в центре положительной гомотетии, переводящей ω в Ω .

1. (а) Докажите, что точки T_a, K, C_1 лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что T_aA — симедиана треугольника $T_aB_1C_1$.
(в) Докажите, что T_aA' содержит медиану треугольника $T_aB_1C_1$.
(г) Докажите, что точки T_a, I, A' лежат на одной прямой.

2. (а) Докажите, что точки B, K, I, T_a лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что I — середина отрезка KL .
3. (а) Пусть M — середина стороны BC . Докажите, что $\angle A_1IM = \angle A_1A'I$.
(б) Докажите, что точка Нагеля изогонально сопряжена центру положительной гомотетии, переводящей ω в Ω .
4. (а) Докажите, что окружности (BIC) и (T_aIA_1) касаются.
(б) Докажите, что прямые KL, BC, T_aA_1 пересекаются в одной точке.
(в) Обозначим точку из предыдущего пункта через X_a . Аналогично определим точки X_b, X_c . Докажите, что точки X_a, X_b, X_c лежат на одной прямой.
(г) Докажите, что прямая T_bT_c проходит через точку X_a .
5. (а) На Ω выбрана точка X . Произвольная прямая, проходящая через вершину A , пересекает прямую BC в точке Y , а Ω — в точке Z . Докажите, что окружность (XYZ) проходит через фиксированную точку.
(б) Докажите, что при $X = T_a$ этой точкой является точка D касания вписанной окружности со стороной BC . Чем является вторая точка пересечения T_aD с Ω ?