

Числа Каталана

Определение. *Правильной скобочной последовательностью* длины $2n$ называется последовательность, состоящая из n открывающихся и n закрывающихся скобок, такая что среди любых первых k скобок открывающихся скобок не меньше чем закрывающихся.

Определение. C_n (n -е число Каталана) — это количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$.

1. Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)» и чтобы две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть, запрещено такое: $\dots(1\dots(2\dots)_1\dots)_2\dots$
2. Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0.$$

3. (а) Докажите, что количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$, равно C_n .
(б) Докажите, что количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, поднимающихся выше прямой $y = x$, совпадает с количеством путей по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, из точки $(0, 0)$ в $(n - 1, n + 1)$.
(в) Выведите из предыдущего пункта явную формулу для чисел Каталана.
4. Найдите количество
 - (а) таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$ таких, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают;
 - (б) способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;
 - (в) способов разрезать выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.
5. Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел таких, что $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, где $a_i \leq i$ равно C_n .
6. Упорядоченным корневым деревом назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенной за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.
 - (а) Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с $n + 1$ вершинами.
 - (б) Найдите количество бинарных деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.

7. Посчитайте количество способов расставить скобки в произведении $n+1$ букв, чтобы порядок умножения был однозначно определён:

$$a(b(cd)); (ab)(cd); ((ab)c)d; a((bc)d); (a(bc))d.$$

8. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^n C_{2i}^i C_{2n-2i}^{n-i} = 4^n.$$