

## Тренировочная олимпиада

1. Существуют ли такие положительные числа  $a, b, c, x$ , что

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad (c + x)^2 = (a + x)^2 + (b + x)^2?$$

2. На доске по порядку записаны натуральные числа от 1 до 2025. Алёна и Ваня играют в игру. Ходы делаются по очереди, начинает Алёна. В свой ход нужно поставить знак «+» или «×» между какими-то соседними числами, между которыми ещё нет знака операции. После 2024 ходов ребята вычисляют значение полученного выражения. Если результат чётный, то выигрывает Ваня, а если нечётный, — то Алёна. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Число  $\underbrace{55 \dots 55}_{2025}$  представили в виде суммы  $k$  слагаемых. Оказалось, что десятичная запись каждого из слагаемых содержит только нули и тройки. Найдите наименьшее возможное значение  $k$ .
4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD, BE$  и  $CF$ . Прямые  $BE$  и  $CF$  второй раз пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Прямая  $EF$  пересекает описанные окружности треугольников  $CEP$  и  $BFQ$  в точках  $X$  и  $Y$ , отличных от точек  $E$  и  $F$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $XDY$  касается прямой  $BC$ .
5. Из клетчатого квадрата  $(n^2 + 1) \times (n^2 + 1)$  вырезали клетчатый квадрат  $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$  с тем же центром. На какое наименьшее число кусков нужно разрезать (по границам клеточек) образовавшуюся каёмку так, чтобы из них можно было сложить квадрат  $2n \times 2n$ ?