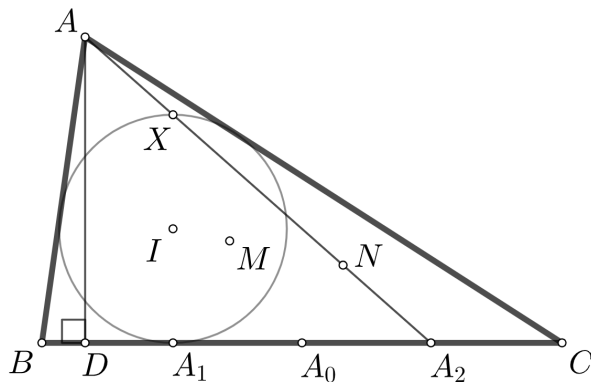


Диаметр вписанной окружности

Во всех задачах используются следующие обозначения. Дан треугольник ABC .

- I и r — центр и радиус вписанной окружности ω ;
- I_a — центр внеписанной окружности со стороны BC ;
- A_1, A_2 — точки касания вписанной и внеписанной окружности со стороной BC ;
- X — точка, диаметрально противоположная A_1 в ω ;
- A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- N — точка Нагеля; M — точка пересечения медиан; H — ортоцентр; O — центр описанной окружности;
- AD — высота.

Важный факт. Точки A, A_2, X лежат на одной прямой.



1. (а) Докажите, что прямые A_0I и A_2M пересекаются в середине отрезка AA_1 .
(б) Докажите, что прямая A_0I отсекает на AD отрезок, равный r .
(в) Докажите, что прямая A_2I делит AD пополам.
(г) Докажите, что $AA_1 \parallel A_0I_a$.
2. (а) **Прямая Нагеля.** Докажите, точки N , M , I лежат на одной прямой. Чему равно отношение $IM : MN$? (*Подсказка: рассмотрите гомотетию, которая переводит треугольник ABC в $A_0B_0C_0$. Куда при этой гомотетии переходит точка N ?*)
(б) Докажите, что $AH = A_2N$.
3. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HA_1 параллельны.
4. Про треугольник ABC известно, что $AB + AC = 3BC$. Докажите, что $IM = r/3$.
5. (а) Докажите, что окружность с центром в середине отрезка A_1I_a , проходящая через точку B , ортогональна ω .
(б) Прямая, проходящая через A_1 и середину высоты AD , повторно пересекает ω в точке E . Докажите, что окружность (BEC) касается ω .
(в) Обозначим окружность (BEC) из предыдущего пункта через ω_a . Аналогично определим ω_b и ω_c . Докажите, что радикальный центр ω_a , ω_b и ω_c лежит на прямой OI .
6. Точка A_2 симметрична середине малой дуги BC окружности (ABC) относительно прямой BC . Аналогично определяются точки B_2 и C_2 . Докажите, что отрезок NH является диаметром окружности $(A_2B_2C_2)$.