Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n через $\nu_p(n)$ будем обозначать степень вхождения p в n.

Лемма об уточнении показателя, или **LTE-лемма**. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда

$$\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a-b) + \nu_p(k).$$

Условие 1: $p \neq 2$, и $a - b$ делится на p.

Условие 2: $p = 2$, и $a - b$ делится на $p^2 = 4$.

1. Пусть для чисел из условия ниже выполнены условия леммы об уточнении показателя. Докажите, что
(а) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a-b)$, если k не кратно p;
(б) $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a-b) + 1$;
(в) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a-b) + \nu_p(k)$ для любого натурального k при $p \neq 2$;
(г) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a-b) + \nu_p(k)$ для любого натурального k при $p = 2$.

2. На какую наибольшую степень пятёрки делится число $3^{1000} - 2^{1000}$?

3. Докажите, что если p — простое число, то $2^p + 3^p$ не может быть точной степенью натурального числа, отличной от первой.

4. **(а)** Найдите показатель числа 1001 по модулю 2^{1001}.
(б) Докажите, что показатель 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

5. Решите уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

6. Найдите все натуральные n такие, что $(n+1)^{n!} - 1$ делится на n^3.

7. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

8. Про натуральное a известно, что при всех натуральных n число $4(a^n+1)$ является точным кубом. Докажите, что $a = 1$.

9. Докажите, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в натуральных числах для любого натурального $n > 2$ при $a, b, c \leqslant n$.