

Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n через $\nu_p(n)$ будем обозначать степень вхождения p в n .

Лемма об уточнении показателя, или **LTE-лемма**. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a , и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда

$$\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k).$$

Условие 1: $p \neq 2$, и $a - b$ делится на p .

Условие 2: $p = 2$, и $a - b$ делится на $p^2 = 4$.

- Пусть для чисел из условия ниже выполнены условия леммы об уточнении показателя. Докажите, что
 - $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b)$, если k не кратно p ;
 - $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$ при $p \neq 2$
 - $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$ для любого натурального k при $p \neq 2$;
 - решите пункты б) и в) при $p = 2$.
- Докажите, что если p — простое число, то $2^p + 3^p$ не может быть точной степенью натурального числа, отличной от первой.
- Докажите, что показатель 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.
 - Найдите показатель числа 1001 по модулю 2^{1001} .
- Решите уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.
- Найдите все натуральные n такие, что $(n + 1)^{n!} - 1$ делится на n^3 .
- Найдите все такие натуральные n , что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.
- Докажите, что не существует натурального $a < 10^{10}$ такого, что число $a^{2022} - 1$ представимо в виде произведения 50 последовательных натуральных чисел.
- Докажите, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в натуральных числах для любого натурального $n > 2$ при $a, b, c \leq n$.
- Найдите все натуральные n такие, что $\frac{2^n + 1}{n^2}$ целое.