

Бинарный куб

Бинарным кубом (или *булевым кубом*) размерности n будем называть граф, вершинам которого соответствуют всевозможные последовательности длины n из нулей и единиц; две вершины соединены ребром, если их последовательности отличаются ровно в одном разряде.

1. Сколько у бинарного куба размерности n
(а) рёбер; (б) циклов длины 4?
2. Докажите, что в бинарном кубе есть гамильтонов цикл (то есть цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз).
3. В стране 16 городов. Можно ли установить между ними дорожное сообщение так, чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог и между любыми двумя городами был путь из не более чем двух дорог?
4. (а) Можно ли отметить на плоскости 2^{100} точек так, чтобы от каждой отмеченной точки было хотя бы 100 отмеченных точек, находящихся от неё на расстоянии 1?
(б) А 3^{100} точек так, чтобы было не меньше 200 отмеченных точек?
5. Из n -мерного бинарного куба удалили две противоположные вершины. Для каких натуральных n оставшиеся вершины можно разбить на пары смежных вершин?
6. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — различные подмножества n -элементного множества B . Обязательно ли найдётся такой элемент $b \in B$, что множества $A_1 \cup \{b\}, A_2 \cup \{b\}, \dots, A_n \cup \{b\}$ попарно различны?
7. На ютуб-канал подписаны 9 человек. Владелец канала ежедневно проводит фан-встречи. Докажите, что подписчики могут посещать фан-встречи в течение 512 дней так, чтобы состав участников ежедневно менялся ровно на одного человека и никогда не повторялся, а также чтобы на первой фан-встрече были все, а на последнюю никто не пришёл.
8. Игорь с Лёшей принесли Мише клетчатую доску $n \times n$. В начале Лёша закрывает глаза, Миша кладёт на каждую клетку доски по монетке орлом или решкой вверх, под одну из клеток кладёт печенье. Далее Игорь (который видел всё, что делает Миша) переворачивает одну из монеток. После этого Лёша открывает глаза и пытается угадать, под какой клеткой лежит печенье. Удастся ли Лёше и Игорю договориться так, чтобы оставишь Мишу без еды, если
(а) $n = 7$; (б) $n = 8$?