Привет с Колма

1. На стороне CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E, а на диагонали BD — точка F. Оказалось, что $AB = DE$, $AC = DF$ и $BC = EF$. Докажите, что $AD \parallel EF$.

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $a! + b$ и $b! + a$ являются степенями пятерки

3. Даны вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что для некоторого натурального $k \leqslant n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_k|$$

4. На окружности отмечено $2n$ точек: n красных и n синих. На одной из красных точек сидит красная лягушка, а на одной из синих сидит синяя. Каждую минуту красная лягушка перепрыгивает на следующую по часовой стрелке красную точку, и одновременно с ней синяя лягушка перепрыгивает на следующую против часовой стрелки синюю точку. Докажите, что для любого изначального расположения лягушек можно провести прямую так, что лягушки всегда будут находиться по разные стороны от этой прямой.

5. Дано натуральное число n. На большой гирлянде висит $2n + 1$ лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой t секунд и записал t попарно различных чисел. Найдите наибольшее возможное значение t (ответ может зависеть от n).

6. Пусть n — натуральное число, а $p \neq n$ — простое такое, что $\frac{p+1}{2}$ также простое, а число $\frac{p^2+n}{p+n^2}$ — целое. Докажите, что $p - 1$ — точный квадрат.

7. Во вписанном пятиугольнике $P_1P_2P_3P_4P_5$ обозначим через I_k центр вписанной окружности треугольника $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ ($P_0 = P_5$ и $P_6 = P_1$)для $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Оказалось, что пятиугольник $I_1I_2I_3I_4I_5$ также является вписанным. Докажите, что прямые $P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4$ и P_5I_5 пересекаются в одной точке.