Осенние сборы, ноябрь 2024, 9 класс. Ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Показатели. Периодичность остатков с периодом равным показателю. Делимость функции Эйлера на показатель.
2. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Произведения вычетов и невычетов. Критерий Эйлера. Квадратичный закон взаимности. Формулы для символов Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. Лемма Туэ. Рождественская теорема Ферма.
3. Многочлены над конечным полем $\mathbb{F}_p$. Теорема Безу. Количество корней многочлена с учетом кратности не превосходит его степени. Теорема Виета.

Геометрия

1. Поворотная гомотетия. Поворотная гомотетия, переводящая один данный отрезок в другой, построение её центра. Точка Микеля. Поворотная гомотетия, переводящая одну из двух данных пересекающихся окружностей в другую. Точка велосипедистов. Леммы о воробьях.
2. Инверсия. Образ прямых и окружностей при инверсии. Касающиеся объекты. Изменение длин отрезков при инверсии. Сохранение углов при между обобщёнными окружностями. Гомотетичность инверсных окружностей. Существование инверсии, которая переводит непересекающиеся окружности в концентрические. Доказательство леммы Архимеда с помощью инверсии в середине дуги.

Комбинаторика

1. Теорема Турана. Эквивалентная формулировка теоремы Турана через число независимости графа. Доказательство теоремы Турана с помощью клонирования вершин.

2. Лемма Холла. Два доказательства леммы Холла: методом чередующихся цепей и индукцией с выкидыванием критического множества. Лемма Холла с дефицитом. Лемма Холла для арабских стран.

3. Хроматическое число графа. Оптимальная рёберная раскраска графа. Рёберное хроматическое число графа. Рёберное хроматическое число двудольного графа (равенство максимальной степени вершины).

4. Теорема Шпернера.

Задачи

Алгебра

1. Докажите, что $3^n - 2^n$ не может делиться на n ни для какого натурального $n > 1$.

2. Решите уравнение в натуральных числах: $4xy - x - y = z^2$.

3. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ имеют вид $2^{n+2}x + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.

4. Даны натуральные числа: нечётное a, чётное b, простое p. Известно, что $p = a^2 + b^2$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p.

5. Конечно ли множество неприводимых многочленов над $\mathbb{F}_p$?

Геометрия

1. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и AEF пересекаются в K. Докажите, что KD — биссектриса угла BKC.

2. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках N_1 и N_2, и окружности, описанные около треугольников ABX и CDX, в точках M_1 и M_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

3. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что окружность (AEF) касается вневписанной окружности треугольника ABC со стороны BC.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Точки E и F — проекции D на стороны AC и AB соответственно. Прямая AD

вторично пересекает окружность (ABC) в точке T, а прямая EF пересекает (ABC) в точках P и Q. Докажите, что точка D является центром вписанной окружности треугольника PQT.

Комбинаторика

1. **(а)** Докажите, что в регулярном двудольном графе есть 1-фактор (паросочетание, в котором участвуют все вершины графа).
(б) Докажите, что регулярный двудольный граф разбивается на 1-факторы.

2. Пусть есть m юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее t девушек, причем всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m; \\ t!/(t-m)!, & t > m \end{cases}$$

способов пережениить юношей на любимых ими девушках.

3. Докажите, что если в любом подграфе графа есть вершина степени не больше d, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

4. Докажите, что хроматическое число планарного графа не превосходит 5.

5. Пусть G — двудольный граф, наименьшая степень степень вершин графа G равна d. Докажите, что существует покраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены d цветов.