# Алгебре — бой

**1.** Существует ли многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ такой, что для любого натурального $n$ выполняется равенство $P(n) = n!$ ?

**2.** Про вещественные числа $a$, $b$, $c > 1$ известно, что $[a]b = [b]c = [c]a$. Докажите, что $a = b = c$.

**3.** Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$ такие, что $p^{q+1} + q^{p+1}$ — полный квадрат.

**4.** Положительные числа $a$, $b$ таковы, что $a^5 - b^3 \geqslant 2a$. Докажите, что $a^3 \geqslant 2b$.

**5.** Пусть $a$, $b$, $c$ — положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geqslant 0.$$

**6.** Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ такой, что для любого $n$ уравнение $\underbrace{P(P(\ldots P(x)\ldots))}_{n} = 1$ имеет $2^n$ вещественных решений?

**7.** Для каких натуральных $n$ найдется вещественное число $a$ такое, что числа $a + \sqrt{2}$ и $a^n + \sqrt{2}$ являются рациональными?

**8.** Назовем простое число $p$ *стандартным*, если найдутся натуральные числа $a, b < \frac{p}{2}$ такие, что $ab - 1$ — это натуральное число, кратное $p$. Сколько существует простых чисел, не являющихся стандартными?