Угадай точку

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что $CI \perp I_1I_2$.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

3. Из центров вневписанных окружностей треугольника провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

4. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведены триссектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, причем точки A_2 и B_2 лежат на отрезках CA_1 и CB_1 соответственно. Пусть P — точка пересечения AA_2 и BB_2, Q — точка пересечения AA_1 и BB_1. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника QA_2B_2.

5. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C проведён перпендикуляр к прямой BM, а через точку M перпендикуляр к диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω в вершине B пересекает прямую, проходящую через O параллельно AB, в точке X. Касательная к ω в вершине C пересекает, прямую, проходящую через O параллельно AC, в точке Y. Докажите, что прямая XY касается ω.

7. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P такая, что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

8. Точка P лежит внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), причём $\angle ABC = 80°$, $\angle PAC = 40°$, $\angle ACP = 30°$. Найдите угол BPC.

9. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Выберем произвольную окружность ω, касающуюся окружности (ABC) внутренним образом в точке A и не пересекающую прямую BC. Отметим на ω точки P и Q так, чтобы прямые BP и CQ касались ω, а отрезки BP и CQ пересекались внутри треугольника ABC. Докажите, что все полученные таким образом прямые PQ проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.