# Теоремы Чевы и Менелая

Пусть различные точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой. Отношением, в котором точка $C$ делит вектор $\overrightarrow{AB}$, назовем число, модуль которого равен отношению длин отрезков $AC$ и $BC$, а знак зависит от расположения точки $C$: если она лежит внутри $AB$, то число положительное, а иначе отрицательное. Обозначение: $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$.

На сторонах (или их продолжениях) $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ отмечены точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно.

**Теорема Чевы.** Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

**Теорема Менелая.** Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

1. Неравные окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ произвольным образом касаются окружности $\Omega$ в точках $A$ и $B$. Докажите, что хотя бы один из центров гомотетий, переводящих $\omega_1$ в $\omega_2$, лежит на прямой $AB$.
   *Тем самым в очередной раз убедитесь в справедливости теоремы о трех центрах гомотетий.*

2. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается его сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$ соответственно. Вневписанная окружность касается продолжения стороны $BC$ за точку $C$ в точке $A_1$. Докажите, что точки $B_1$, $C_1$, $A_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда угол $C$ прямой.

3. Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника, проведённые в его вершинах, пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в точках, лежащих на одной прямой.

**4.** Прямые $AP$, $BP$, $CP$ пересекают стороны $BC$, $CA$, $AB$ треугольника $ABC$ соответственно в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Окружность $(A_1B_1C_1)$ вторично пересекает прямые $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$. Докажите, что прямые $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ пересекаются в одной точке.

**5.** **Теорема Дезарга.** Прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке. Прямые $AB$ и $A_1B_1$ пересекаются в точке $C_2$, $BC$ и $B_1C_1$ пересекаются в точке $A_2$, $CA$ и $C_1A_1$ пересекаются в точке $B_2$. Докажите, что точки $A_2, B_2, C_2$ лежат на одной прямой.

**6.** **Прямая Гаусса.** Продолжения сторон $AB$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а продолжения сторон $AD$ и $BC$ — в точке $Q$. Докажите, что середины отрезков $AC$, $BD$ и $PQ$ лежат на одной прямой.

**7.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ отмечены точки $D, E$, причем $AD = BE$; на стороне $BC$ отмечены точки $K, L$, причем $BK = LC$; и, наконец, на стороне $AC$ отмечены точки $M, N$, причем $CM = AN$. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и содержащие диагонали параллелограммов $ADXN, BKYE, CLZM$, пересекаются в одной точке.

**8.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром $I$, которая касается стороны $AC$ в точке $K$. Другая окружность с центром $I$ пересекает сторону $AC$ в точках $B_1$ и $B_2$, причем $B_1$ ближе к $A$, а стороны $AB$ и $BC$ в точках $C_1, C_2$ и $A_1, A_2$ соответственно, причем $C_2$ и $A_1$ ближе к $B$. Докажите, что точки $B, K$, и точка пересечения отрезков $B_1A_1$ и $B_2C_2$ лежат на одной прямой.