Интерполяция

Определение. Построение многочлена степени не выше $n-1$ по n точкам называется *интерполяцией.*

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что для любых вещественных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ найдётся и при том единственный многочлен $P(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$; причем его формула имеет вид
$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

2. Даны различные вещественные числа a, b, c, d, e. Найдите значение выражения
$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(e-c)(e-d)(e-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{(e-d)(e-a)(e-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}.$$

3. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые 4 из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

4. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий различные вещественные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени меньше чем n. Докажите, что дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей вида $\frac{A_i}{x-x_i}$, где A_i — некоторые вещественные числа, а i пробегает значения $1, \ldots, n$.

5. Алексей задумал многочлен десятой степени. Игорь может назвать десять различных вещественных чисел и Алексей сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Алексей не сообщает, какое именно число из названных Игорем он подставил. Может ли Игорь определить многочлен за несколько вопросов?

6. Многочлен $P(x)$ степени n таков, что $P(0) = 1$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $P(n) = \frac{1}{n+1}$. Найдите **(а)** $P(n+1)$, **(б)** $P(2n)$.

7. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что для любых вещественных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_2 \\ \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n \end{cases}$$
имеет и при том единственное решение.

8. Докажите, что любой приведенный многочлен степени n можно представить как среднее арифметическое двух приведенных многочленов степени n, каждый из которых имеет n вещественных корней.