Интерполяция

Определение. Построение многочлена степени не выше $n-1$ по n точкам называется *интерполяцией.*

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что для любых вещественных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ найдётся и при том единственный многочлен $P(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$; причём его формула имеет вид

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

2. Даны различные вещественные числа a, b, c, d, e. Найдите значение выражения

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(e-c)(e-d)(e-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{(e-d)(e-a)(e-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}.$$

3. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий различные вещественные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени меньше чем n. Докажите, что дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы дробей вида $\frac{A_i}{x-x_i}$, где A_i — некоторые вещественные числа, а i пробегает значения $1, \ldots, n$.

4. Алексей задумал многочлен десятой степени. Игорь может назвать десять различных вещественных чисел и Алексей сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Алексей не сообщает, какое именно число из названных Игорем он подставил. Может ли Игорь определить многочлен за несколько вопросов?

5. Многочлен $P(x)$ степени n таков, что $P(0) = 1$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $P(n) = \frac{1}{n+1}$. Найдите **(а)** $P(n+1)$, **(б)** $P(2n)$.

6. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что для любых вещественных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_2 \\ \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет и при том единственное решение.

7. Докажите, что любой приведенный многочлен степени n можно представить как среднее арифметическое двух приведенных многочленов степени n, каждый из которых имеет n вещественных корней.

8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что значение выражения

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j}$$

равно остатку от деления n на 2.