Жадные алгоритмы

1. В графе 2000 вершин. Степень каждой вершины меньше 40. Докажите, что можно выбрать 50 вершин, попарно не соединенных друг с другом.

2. Петя нарисовал на бумаге дерево T на n вершинах. Вася нарисовал граф G, степень каждой вершины которого не менее n. Обязательно ли Петя может покрасить некоторые ребра графа G красным цветом, чтобы получившийся красный граф был изоморфен T?

3. Назовем число волшебным, если оно равно 2, или представляется в виде 3^a5^b, где a и b — целые неотрицательные. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных волшебных чисел.

4. Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено в виде

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3,$$

где x, y, z — целые числа такие, что $0 \leqslant x < y < z$.

5. В таблице $2 \times n$ (2 строки, n столбцов) расставлены положительные числа, причем сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что можно выбрать по одному числу в каждом столбце таким образом, чтобы в каждой строке сумма выбранных чисел была не больше $\frac{n+1}{4}$.

6. На плоскости расположено несколько кругов, площадь объединения которых равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, суммарная площадь которых не менее $\frac{S}{9}$.

7. На плоскости проведено n прямых общего положения. Назовем *ограниченными* части, которые имеют конечную площадь. Докажите, что при $n \geqslant 3$ можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.