

Инверсия

Инверсией с центром в точке O и радиусом r называется преобразование, которое каждую точку A , отличную от O , переводит в точку A' на луче OA такую, что $OA \cdot OA' = r^2$.

При инверсии с центром в точке O

- прямая, проходящая через O , переходит в себя;
- окружность, проходящая через O , переходит в прямую, не проходящую через O ;
- прямая, не проходящая через O , переходит в окружность, проходящую через O ;
- окружность, не проходящая через O , переходит в окружность, не проходящую через O .

Важный факт. При инверсии касающиеся объекты (две окружности, прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

1. Дана точка A , лежащая вне окружности ω .
 - (а) Из точки A проведены касательные AB и AC к ω . Докажите, что при инверсии относительно ω точка A переходит в середину отрезка BC .
 - (б) С каким радиусом необходимо сделать инверсию с центром в точке A , чтобы ω перешла в себя?
2. Через точку A к окружности ω с центром в точке O проведены касательные $AХ$ и $AУ$, а также секущая, пересекающая окружность в точках B и C . Докажите, что точки B , C , O и середина отрезка $ХУ$ лежат на одной окружности.
3. **Лемма Архимеда.** В окружности ω проведена хорда AB . Окружность γ касается ω в точке C , а отрезка AB в точке D . Точка M — середина дуги AB окружности ω , не содержащей точку C . Докажите, что точки C , D , M лежат на одной прямой, сделав инверсию
 - (а) с центром в точке C и произвольным радиусом;

- (б) с центром в точке M и радиусом AM ;
- (в) с центром в точке A и произвольным радиусом.

4. Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается внеписанной окружности треугольника ABC со стороны BC .
5. На плоскости взяты шесть точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1A_2B_3, A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $B_1B_2A_3, B_1A_2B_3$ и $A_1B_2B_3$ пересекаются в одной точке.
6. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C , проходящие через H , имеют общую касательную.
7. На прямой даны два непересекающихся отрезка. Найдите ГМТ, из которых эти два отрезка видны под равными углами.