Лемма Холла

Лемма Холла. Есть несколько юношей и девушек. Известно, что для любых k юношей количество девушек, знакомых хотя бы с одним них, не меньше k. Тогда каждого юношу можно женить на знакомой ему девушке.

Определение. *Паросочетание* — это набор рёбер графа, никакие два из которых не имеют общей вершины. *Совершенное паросочетание* — это паросочетание, покрывающее каждую вершину графа.

Ещё два полезных утверждения

1. **Лемма Холла с дефицитом.** Дано натуральное число d. Докажите, что если любые k юношей (для всех $1 \leqslant k \leqslant n$) знакомы в совокупности не меньше чем с $k-d$ девушками, то $n-d$ юношей можно женить на знакомых им девушках.

2. **Лемма Холла для арабских стран.** Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что если любые k юношей знакомы в совокупности не меньше чем с km девушками, то это можно сделать.

Задачи

3. В двудольном графе степени всех вершин равны k. Докажите, что в нём есть совершенное паросочетание.

4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

5. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

6. У Деда Мороза есть множество подарков для n школьников. У i-го школьника есть ровно a_i желаемых подарков из этого множества.

Оказалось, что
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1.$$
Докажите, что Дед Мороз может дать каждому школьнику желаемый подарок.

7. Латинским называется прямоугольник $m\times n$, где $m\leqslant n$, в каждой клетке которого записано число от 1 до n таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце записанные числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n\times n$.