Поворотная гомотетия

Поворотной гомотетией с центром в точке O, коэффициентом $k > 0$ и углом φ называется композиция поворота в точке O на угол φ и гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k.

Первый сюжет

1. **(а)** Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке X. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая отрезок AB в $A'B'$, причём центром этой гомотетии является вторая точка пересечения окружностей $(AA'X)$ и $(BB'X)$.
(б) По двум прямым, пересекающимся в точке O, с постоянными (но, возможно, неодинаковыми) скоростями движутся точки A и B, причём в точке O они оказываются в разные моменты времени. Докажите, что описанные окружности треугольников OAB проходят через фиксированную точку, отличную от O.

2. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в $A'B'$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA' в BB'. Выведите отсюда существование точки Микеля.

3. Точки A_2, B_2, C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$, $A_2C_1B_2$.

4. На окружности (ABC) выбрана точка X. Точки C_1 и B_1 — основания перпендикуляров из точки X на стороны AB и AC соответственно. Пусть M и N — середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Докажите, что $\angle MNX = 90°$.

Второй сюжет

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в точке A, которая переводит ω_1 в ω_2, а точку P — в точку Q.

6. **(а)** Докажите, что середины всевозможных отрезков PQ из предыдущей задачи лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что существует фиксированная точка, которая равноудалена от точек P и Q для любого выбора этих точек.

7. Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от

1 до 5, причём в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

8. Окружность с центром O проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть D — вторая точка пересечения окружностей (ABC) и (AB_1C_1). Докажите, что $\angle ADO = 90°$.

9. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC выбраны точки D, E, F соответственно так, что треугольники ABC и DEF подобны. Докажите, что центр окружности (ABC) совпадает с ортоцентром треугольника DEF.