

Планарные графы

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер. Такое изображение планарного графа на плоскости называется *плоским* графом (то есть плоский граф — это планарный граф вместе с каким-то фиксированным изображением).

Области, на которые плоский граф разбивает плоскость, называются *гранями* (неограниченная часть плоскости тоже считается гранью).

- 1. Формула Эйлера.** Пусть V — количество вершин связного плоского графа, P — рёбер, G — граней. Докажите, что $V - P + G = 2$.
Указание: начните с деревьев.
- 2.** Докажите, что для любого связного планарного графа, в котором $V \geq 3$, выполнено неравенство
(а) $2P \geq 3G$; (б) $P \leq 3V - 6$.
- 3.** Докажите, что следующие графы не планарны:
(а) K_5 — полный граф на 5 вершинах;
(б) $K_{3,3}$ — полный двудольный граф с долями из трёх вершин.
- 4.** Докажите, что в любом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.

Важное наблюдение. Выпуклый многогранник можно воспринимать как планарный граф. Понятно, что не каждому планарному графу соответствует многогранник (например, потому что у многогранника степень каждой вершины хотя бы 3).

- 5.** Дан выпуклый многогранник с n вершинами. Найдите сумму всех его плоских углов (то есть сумму всех углов всех его граней).
- 6.** Каждая грань выпуклого многогранника — пятиугольник или шестиугольник.
(а) Пусть в каждой вершине сходится 3 ребра. Сколько пятиугольных граней может быть?
(б) Найдите наименьшее возможное количество пятиугольных граней.
- 7.** Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее, чем на $n - 3$ тетраэдра.