Неравный разнобой

1. Про положительные числа a, b, x, y известно, что $ax + by = xy$. Докажите, что $ax + by \geqslant 4ab$.

2. Докажите, что если $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, то $x^5 + y^5 + (x - y)^5 \leqslant 2$.

3. Решите уравнение $(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$.

4. При каких натуральных $n \geqslant 3$ верно следующее утверждение: для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$, сумма которых равна 0, выполнено неравенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leqslant 0?$$

5. По кругу расставлено $n > 3$ положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, произведение которых равно 1. Докажите, что для этих чисел выполнено неравенство

$$(a_1+a_2)^2(a_2+a_3)^2 \ldots (a_n+a_1)^2 > (a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4) \ldots (a_n+a_1+a_2).$$

6. Известно, что $1 \leqslant a \leqslant 2 \leqslant b \leqslant 3 \leqslant c \leqslant 4$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc \geqslant 4.$$

7. Известно, что числа x, y, z удовлетворяют неравенству $0 < x, y, z \leqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{xy}{z + xy + xyz} + \frac{yz}{x + yz + xyz} + \frac{zx}{y + xz + xyz} \leqslant 1.$$

8. Для положительных чисел a, b, c, d таких, что $ab + bc + cd + da = 1$, докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b + c + d} + \frac{b^3}{a + c + d} + \frac{c^3}{a + b + d} + \frac{d^3}{a + b + c} \geqslant \frac{1}{3}.$$