

Гомотетия 2.0

1. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке X . Общие внешние касательные к ω_1 и ω_2 пересекаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает ω_1 в точках B и C , а ω_2 в точках D и E (порядок точек, соответственно, $A - B - C - D - E$). Докажите, что $\angle BXD = \angle CXE = 90^\circ$.
2. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD , касающихся соответственно отрезков BD и CD , также равны.
3. Дан треугольник ABC и некоторая точка X . Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые, проведенные через вершины A, B, C параллельно прямым XA_1, XB_1, XC_1 , пересекаются в одной точке.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , пересекающиеся в точке H . Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ; получили точки H_a, H_b, H_c соответственно. Докажите, что AH_a, BH_b, CH_c пересекаются в одной точке.
5. Внутри треугольника ABC построены окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, такие что ω_1 касается AB и AC , ω_2 касается AB и BC , а ω_3 касается AC и BC . Кроме того ω_1, ω_2 и ω_3 касаются внешним образом некоторой окружности Ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.
6. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K . Окружность ω_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD , причем вторая точка пересечения ω_1 с диагональю AC лежит на отрезке AK . Окружность ω_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD , причем вторая точка пересечения ω_2 с диагональю AC лежит на отрезке KC . Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей ω_1 и ω_2 , будут параллельны между собой.
7. Дана окружность с отмеченной на ней точкой A , а также точка N , расположенная внутри данной окружности. Рассматриваются все возможные хорды BC , проходящие через точку N . Найдите ГМТ центров окружности девяти точек треугольника ABC .
8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , такими что $AD > BC$. Обозначим за X точку пересечения прямых AB и CD . Через точку X проведена прямая, пересекающая отрезки BC и AD в точках L и K соответственно. Точки P и Q на отрезке KL таковы, что $\angle APD = \angle ABC$, $\angle BQC = \angle BAD$. Докажите, что точки A, B, Q, P лежат на одной окружности.