Прямая Симсона

Проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника ABC, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P лежит на (ABC). Эта прямая называется *прямой Симсона* точки P относительно треугольника ABC.

Понятно, что для точки P, лежащей на (ABC), точки, симметричные P относительно сторон треугольника, лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Штейнера* точки P относительно треугольника ABC.

База

1. **(а)** *(Эту задачу нужно сдавать в направленных углах.)* На окружности (ABC) выбрана точка P. Прямая, проходящая через P перпендикулярно BC, вторично пересекает (ABC) в точке D. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна прямой AD.
(б) На (ABC) выбраны точки P и P'. Обозначим их прямые Симсона через ℓ и ℓ'. Найдите (ℓ, ℓ'), если $\measuredangle PAP' = \alpha$.

2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что для любой точки P на окружности (ABC) прямая Симсона точки P проходит через середину отрезка PH.

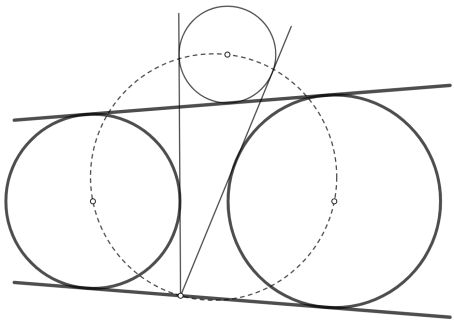
Задачи

3. **Задача 255.** Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Биссектриса угла B пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что $\angle BDC = 90°$.

4. Четыре прямые общего положения в пересечении образуют четыре треугольника.
(а) Прямая Обера. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

5. Даны две окружности и три прямые. Каждая прямая высекает на окружностях хорды равной длины. Точки пересечения прямых образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника проходит через середину отрезка между центрами данных окружностей.

6. К окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие внешние касательные ℓ_1 и ℓ_2. На отрезке общей внешней касательной на прямой ℓ_1 выбрана точка A. Вторые касательные к окружностям ω_1 и ω_2, проведённые из точки A, пересекают ℓ_2 в точках B и C. Пусть D — центр вневписанной окружности треугольника ABC со стороны вершины A. Докажите, что A, D и центры ω_1 и ω_2 лежат на одной окружности.



7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Медиана, проведённая из вершины A, пересекает отрезок B_1C_1 в точке X. Докажите, что $XA_1 \perp BC$.

8. Прямая ℓ проходит через ортоцентр треугольника. Докажите, что прямые, симметричные ℓ относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника.

9. Точка M — середина стороны BC остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника. Прямая MH пересекается с биссектрисой угла A в точке Q. Окружность, построенная на AQ как на диаметре, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через точку H.

10. Описанные окружности треугольников ABC и DEF совпадают. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника, образованного прямыми Симсона точек D, E, F относительно треугольника ABC. Докажите, что O — середина отрезка, соединяющего ортоцентры треугольников ABC и DEF.