

Тренировочная олимпиада

1. Найдите наименьшее натуральное N , для которого верно следующее утверждение:
«Для каждого конечного набора точек на плоскости, из того, что любые N точек этого набора лежат не более чем на двух прямых, следует, что и все точки этого набора лежат не более чем на двух прямых.»
2. Натуральные числа x и y при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток r . При этом, их произведение xy делится на $n!$. Докажите, что $r = 0$.
3. Внеписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Точка A лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что вторая точка пересечения этой окружности со стороной BC – основание высоты треугольника ABC , опущенной из вершины A .
4. Рассмотрим граф, в котором 256 вершин — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 8, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 128 ребер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные ребра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более, чем 14, в котором красные и синие рёбра чередуются.
5. Дано натуральное число n . Оказалось, что множество таких натуральных a , что $1 < a < n$ и $a^{a-1} - 1$ делится на n , равно $\{n - 1\}$. Докажите, что n — удвоенное простое число.