Отборочная олимпиада

1. Для любого действительного $0 \leqslant x \leqslant 1$ и натурального n докажите неравенство:
$$(1+x)^n \leqslant 1+(2^n-1)x.$$

2. Найдите наименьшее натуральное N, для которого верно следующее утверждение:
«Для каждого конечного набора точек на плоскости, из того, что любые N точек этого набора лежат не более чем на двух прямых, следует, что и все точки этого набора лежат не более чем на двух прямых.»

3. Натуральные числа x и y при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток r. При этом, их произведение xy делится на $n!$. Докажите, что $r=0$.

4. Существует ли многочлен третьей степени, имеющий три попарно различных целых корня, у которого есть три равных по модулю коэффициента?

5. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что вторая точка пересечения этой окружности со стороной BC – основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A.

6. Рассмотрим граф, в котором 256 вершин — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 8, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 128 ребер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные ребра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более, чем 14, в котором красные и синие рёбра чередуются.