

Периодичность

1. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, $0 < m < n$. Докажите, что если $(n, 10) = 1$, то десятичная запись этой дроби — чисто периодическая, причём длина её минимального периода равна наименьшему d такому, что $10^d - 1$ делится на n .
2. Бесконечная последовательность периодична (возможно, с предпериодом). В ней оставлены только члены, чьи номера образуют геометрическую или арифметическую прогрессию. Докажите, что полученная последовательность периодична (возможно, с предпериодом).
3. Докажите, что если у бесконечной последовательности есть периоды с длинами m и n , то у неё есть период длины $\text{НОД}(m, n)$.
4. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — чисто периодические последовательности действительных чисел с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?
5. Последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ такова, что $0 \leq a_1 \leq 1$ и $a_{n+1} = 1 - |1 - 2a_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (возможно, с предпериодом) тогда и только тогда, когда $a_1 \in \mathbb{Q}$.
6. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T .
7. (а) Даны две периодические последовательности без предпериодов. Длины их минимальных периодов — взаимно простые числа m и n . Чему равна максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?
(б) Даны взаимно простые числа m и n . Какова наибольшая длина последовательности, сумма любых n последовательных чисел которой положительна, а сумма любых m последовательных чисел — отрицательна?
8. Есть бесконечная в обе стороны клетчатая полоса, состоящая из белых клеток и шаблон — некоторое конечное подмножество клеток полосы. Разрешается сдвигать шаблон на целое число клеток и одновременно перекрашивать все клетки, покрытые сдвигом шаблона (белые на чёрные и наоборот). Докажите, что можно сделать серию перекрашиваний так, чтобы чёрными были ровно две клетки.