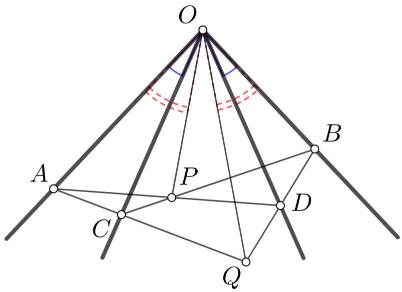
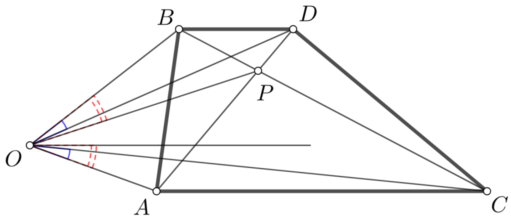
Лемма об изогоналях

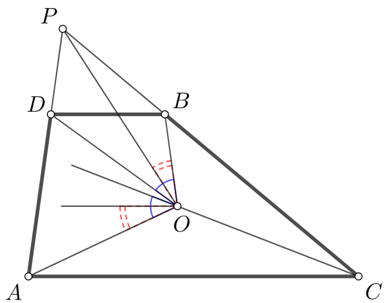
Лемма об изогоналях. Пусть OC и OD — изогонали относительно угла AOB. Обозначим точку пересечения прямых AD и BC через P, а точку пересечения прямых AC и BD — через Q. Тогда прямые OP и OQ являются изогоналями относительно угла AOB.



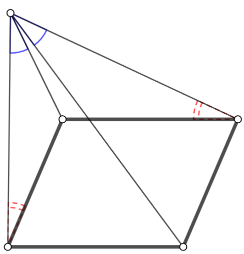
Лемма верна для любой конфигурации, не только для изображённой на рисунке. Существует много вырожденных случаев, в которых лемма остаётся верной.

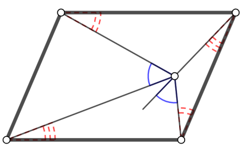
Какая-нибудь пара прямых, например, AC и BD, могут быть параллельны. В этом случае прямую OQ нужно заменить на прямую, проходящую через O параллельно AC.

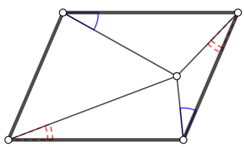




Параллельными могут быть обе пары прямых: AC и BD, AD и BC. В этом случае лемма об изогоналях также верна, но более полезными будут следующие формулировки:







Наконец, можно рассматривать случаи, когда какая-нибудь из точек, например, A, будет бесконечно удалённой. В этом случае прямые AC и AD заменятся на прямые, проходящие через C и D соответственно параллельно OA.

1. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGH$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте треугольника ABC, проведённой из вершины A.

2. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

3. В треугольнике ABC из вершин к противолежащим сторонам проведены отрезки AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке. Докажите, что если углы C_1A_1B и B_1A_1C равны, то AA_1 — высота треугольника ABC.

4. Пусть пары точек X и X', Y и Y' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения пар прямых XY и $X'Y'$, XY' и $X'Y$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки I и K — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а J и L — центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и JK пересекаются на биссектрисе угла BCD.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны углы B и C. Лучи DA и CB пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P параллельно AB, пересекает прямую BD в точке T. Докажите, что $\angle ACB = \angle PCT$.

7. Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Точка A_1 такова, что H — центр вписанной окружности треугольника A_1BC. Докажите, что прямые AA_1, OH, BC пересекаются в одной точке.

8. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, лучи DA и CB пересекаются в точке F. Точка G такова, что $ECGD$ — параллелограмм, точка H симметрична E относительно прямой AD. Докажите, что точки F, H, D, G лежат на одной окружности.

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, D — точка, диаметрально противоположная A в (ABC), E — проекция A_1 на B_1C_1. Докажите, что $\angle C_1EH = \angle B_1ED$.