

Про стрелочки

1. Стороны треугольника T параллельны медианам треугольника T_1 . Докажите, что медианы треугольника T параллельны сторонам треугольника T_1 .
2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. A' , B' , C' и D' — середины сторон BC , CD , DA и AB соответственно. Известно, что $AA' = CC'$ и $BB' = DD'$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?
3. Точки B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков BC и B_1C_1 , параллельна биссектрисе угла A треугольника.
4. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых больше 1.
5. Пусть O — центр правильного треугольника ABC . Из произвольной точки P опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO .
6. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведённые отрезки равны.
7. На столе лежал проволочный треугольник с углами x° , y° , z° . Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x - 1)^\circ$, 181° , $(y - 1)^\circ$, 181° , $(z - 1)^\circ$, 181° . Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.
8. Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.