Веса

Во всех задачах некоторым объектам надо присвоить веса и посмотреть, что происходит с этими весами при указанных в условии операциях, или посмотреть на веса двумя разными способами.

1. На бесконечной в одну сторону полоске клеток, пронумерованных натуральными числами, лежит конечное число фишек (в каждой клетке может лежать несколько фишек). Расположение фишек называется *окончательным*, если в нём невозможно выполнить операцию.
(а) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что окончательное положение не зависит от порядка выполнения операций.
(б) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что окончательное положение не зависит от порядка выполнения операций.

2. У каждого из девятиклассников, записавшихся на кружок, не больше 20 друзей. Докажите, что школьников можно разделить на группы 9-1 и 9-2 так, чтобы у каждого человека в группе 9-1 было не больше 15 друзей внутри группы, а у каждого человека в группе 9-2 было не больше 5 друзей внутри группы.

3. В некоторые клетки прямоугольной клетчатой доски поставили по одной фишке. Известно, что для любой клетки, в которой есть фишка, количество фишек в её столбце равно количеству фишек в её строке. Докажите, что число строк доски, содержащих хотя бы одну фишку, равно числу столбцов, содержащих хотя бы одну фишку.

4. Несколько камней разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

5. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i; j)$ и добавить по фишке в узлы $(i+1; j)$ и $(i; j+1)$ при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.
(а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.
(б) Докажите, что если изначально в узле $(0; 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

6. На плоскости расположены $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения этих окружностей.

7. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол так, чтобы на отрезке между любыми двумя людьми стояла бутылка?

8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдутся два с общей стороной.