# Изогональное сопряжение

**Определения.** Две прямые, проходящие через вершину угла, называются *изогоналями* относительно этого угла, если они получаются друг из друга отражением относительно биссектрисы этого угла.

Точки $P$ и $Q$ называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника $ABC$, если прямые $AP$ и $AQ$, $BP$ и $BQ$, $CP$ и $CQ$ являются изогоналями относительно соответствующих углов треугольника.

**Примеры.** Точка пересечения высот и центр описанной окружности; центр вписанной окружности; центры вневписанных окружностей.

1. **(а)** Дан треугольник $ABC$ и точки $P$ и $Q$ такие, что $\measuredangle BAP = \measuredangle QAC$. Точки $P_b$ и $P_c$ симметричны точке $P$ относительно прямых $AC$ и $AB$. Докажите, что $AQ \perp P_bP_c$.
**(б)** Докажите, что для точки $P$, не лежащей на описанной окружности треугольника $ABC$, существует изогонально сопряженная ей точка $Q$. А что с точками на описанной окружности?

2. Точки $P$ и $Q$ изогонально сопряжены относительно треугольника $ABC$. Опустим из них перпендикуляры на прямые $AB$, $AC$, $BC$. Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности. Где находится центр этой окружности?

3. Касательные к описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $B$ и $C$ пересекаются в точке $P$. Точка $Q$ симметрична точке $A$ относительно середины отрезка $BC$. Докажите, что точки $P$ и $Q$ изогонально сопряжены относительно треугольника $ABC$.

4. В треугольнике $ABC$ провели высоты $AA_0$, $BB_0$, $CC_0$. $M$ — произвольная точка, $A_1$ — точка, симметричная $M$ относительно $BC$, аналогично определим точки $B_1$, $C_1$. Докажите, что прямые $A_0A_1$, $B_0B_1$, $C_0C_1$ пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90^\circ$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки $D$ на прямые $AB$, $BC$, $AC$, и середина отрезка $AC$ лежат на одной окружности.

**6.** Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из $A$ на $DC$, $P$ — такая точка на прямой $AC$, что прямая $PD$ касается окружности $(ABD)$. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

**7.** **Теорема Паскаля.** На окружности расположены точки $A$, $C$, $E$, $B$, $F$, $D$ в указанном порядке. Отрезки $AB$ и $DE$ пересекаются в точке $X$, отрезки $AF$ и $CD$ — в точке $Y$, отрезки $BC$ и $EF$ — в точке $Z$. Докажите, что точки $X$, $Y$, $Z$ лежат на одной прямой.

**8.** Даны три непересекающиеся окружности. К ним проведены шесть внутренних касательных. Оказалось, что три из них пересекаются в одной точке. Докажите, что и три другие тоже пересекаются в одной точке.