Многочлены с целыми коэффициентами

Следствие из теоремы Безу. Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $Q(a) - Q(b)$ делится на $(a - b)$ для любых целых различных a и b.

1. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

2. Пусть несократимая дробь $\frac{a}{b}$ — корень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ делится на $bk - a$.

3. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

5. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k), P(k+1), \ldots, P(k+2024)$ будут составными.

6. Докажите, что не существует непостоянного многочлена с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

7. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

8. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение b.