# Направленные углы

*Направленным углом* $\angle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$ называют угол, на который надо повернуть прямую $\ell_1$ против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную $\ell_2$. Значение направленного угла определено с точностью до $180^\circ$. Основные свойства направленных углов:

- $\angle(\ell_1, \ell_2) = -\angle(\ell_2, \ell_1)$;
- $\angle(\ell_1, \ell_2) + \angle(\ell_2, \ell_3) = \angle(\ell_1, \ell_3)$;
- $\angle(\ell_1, \ell_2) = 0 \Leftrightarrow \ell_1 \parallel \ell_2$;
- $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) \Leftrightarrow A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой;
- $\angle(AB, BC) = -\angle(AC, CB) \Leftrightarrow AB = BC$ или $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой.

**Пример.** Дан треугольник $ABC$. На прямых $AB$, $AC$, $BC$ выбраны точки $C_1$, $B_1$, $A_1$ соответственно. Тогда окружности $(AB_1C_1)$, $(A_1BC_1)$, $(A_1B_1C)$ пересекаются в одной точке.

*Замечание 1.* Равенства с направленными углами нельзя делить. Например, попробуйте поделить на 2 верное равенство $\angle(\ell_1, \ell_2) = 180^\circ + \angle(\ell_1, \ell_2)$.

*Замечание 2.* Для удобства можно вместо обозначения $\angle(AB, BC)$ использовать обозначение $\measuredangle ABC$. Но на этом занятии это запрещено.

1. **Прямая Симсона.** Докажите, что проекции точки $P$ на прямые, содержащие стороны треугольника $ABC$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $P$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

2. **Точка Микеля.** Четыре прямые общего положения в пересечении образуют четыре треугольника. Докажите, что их описанные окружности пересекаются в одной точке.

3. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A_1$ и $B_1$, окружности $\omega_2$ и $\omega_3$ — в точках $A_2$ и $B_2$, окружности $\omega_3$ и $\omega_4$ — в точках $A_3$ и $B_3$, окружности $\omega_4$ и $\omega_1$ — в точках $A_4$ и $B_4$. Докажите, что если точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ лежат на одной окружности или прямой, то точки $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ лежат на одной окружности или прямой.

**4.** На окружности с центром $O$ выбраны точки $A$, $B$, $C$, $D$. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$. Окружности $(ADP)$ и $(BCP)$ повторно пересекаются в точке $Q$. Докажите, что точки $A$, $C$, $O$, $Q$ лежат на одной окружности.

**5.** Точки $O$ и $I$ — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $BC$. Окружности $(ABC)$ и $(BIO)$ вторично пересекаются в точке $D$. Докажите, что прямая $BD$ касается окружности $BIO$.

**6.** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Обозначим одну из точек пересечения прямой $B_1C_1$ с окружностью $(ABC)$ через $X$. Пусть $Y$ — точка пересечения прямых $A_1C_1$ и $BX$. Докажите, что $AX = AY$.

**7.** Треугольник $ABC$ ($\angle C \neq 90°$) вписан в окружность с центром в точке $O$, на окружности отмечена точка $D$. Перпендикуляр, опущенный из $D$ на $BC$, пересекает прямую $AC$ в точке $E$. Докажите, что центр окружности $(AED)$ лежит на окружности $(AOB)$.

**8.** На плоскости даны точки $A$, $B$, $C$, $D$ общего положения. Докажите, что окружности Эйлера треугольников $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ пересекаются в одной точке.

**9.** Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка $X$, что выполнено равенство $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон $AB$ и $CD$, $BC$ и $DA$ пересекаются в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями $AC$ и $BD$.