Радикальные оси – 2

Наблюдение. Можно определить степень точки A относительно точки B, считая последнюю окружностью с радиусом 0. Тогда $\mathrm{Pow}(A, B) = AB^2 - 0^2 = AB^2$. Это позволяет рассмотреть радикальную ось точки и окружности.

1. Точка P лежит вне окружностей ω_1 и ω_2. Пусть ℓ_1 — прямая, проходящая через точки касания касательных из P к ω_1, аналогично определим прямую ℓ_2, и обозначим как Q точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2.

2. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K. Точка I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точка M – середина KI_A. Докажите, что длина отрезка касательной из M к вписанной окружности треугольника ABC равна отрезку MB.

3. **(а)** Докажите, что радикальным центром трех вневписанных окружностей треугольника является центр вписанной окружности его серединного треугольника.
(б) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины ломаных BAC, ABC, ACB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

4. Обозначим основания высот неравнобедренного треугольника ABC, проведённых из точек A, B и C, через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке Q. Докажите, что $PQ \perp OM$, где O и M — центр описанной окружности и точка пересечения медиан треугольника ABC соответственно.

5. Дан треугольник ABC; O — центр описанной окружности; I — центр вписанной окружности; I_A, I_B и I_C — центры вневписанных окружностей; A_1, B_1, и C_1 — основания биссектрис; A_0, B_0 и C_0 — середины дуг BC, AC, AB.
(а) Докажите, что B_1C_1 — радикальная ось описанных окружностей треугольников ABC и I_BII_C.
(б) Пусть D и E — точки пересечения прямой B_1C_1 с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника DIE в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.
(в) Докажите, что прямые B_1C_1 и OI_A перпендикулярны.
(г) Пусть прямые B_1C_1 и B_0C_0 пересекаются в точке P_A. Докажите, что тогда P_AI параллельно BC, а P_AA является касательной к описанной окружности треугольника ABC.
(д) Определим точки P_B и P_C аналогично. Докажите, что P_A, P_B и P_C лежат на одной прямой.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Точки M и N таковы, что BC_1MC и CB_1NB — параллелограммы. Докажите, что $MK = NK$.