Радикальные оси

Геометрическим местом точек, имеющих одинаковые степени относительно неконцентрических окружностей, является прямая, перпендикулярная линии центров окружностей. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей. Радикальные оси трёх окружностей, чьи центры не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центом* трёх окружностей.

С помощью радикальных очей можно доказывать разные утверждения.

- То, что три точки лежат на одной прямой, можно доказать, найдя две окружности, относительно которых каждая из данных точек имеет одинаковую степень.
- То, что три прямые пересекаются в одной точке, можно доказать, приведя три окружности, для которых эти прямые являются радикальными осями.
- Также то, что три точки лежат на одной прямой, можно доказать, если обнаружить три окружности с центрами в этих точках, имеющие общую радикальную ось.
- Перпендикулярность двух прямых можно продемонстрировать, найдя две окружности такие, что одна из прямых — это линия их центров, а другая — радикальная ось.

1. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

2. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 соответственно. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, $C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что все 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

3. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

4. **(а)** Докажите, что радикальным центром трех вневписанных окружностей треугольника является центр вписанной окружности его серединного треугольника.

(б) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — середины ломаных BAC, ABC, ACB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. **(а)** На прямых, содержащих стороны AC и AB треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника имеет одинаковую степень относительно окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметрах.

(б) Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*), ортоцентры треугольников AED, BEC, DFC, AFB лежат на одной прямой (*прямая Обера*), причем эти прямые перпендикулярны.

6. Обозначим основания высот неравнобедренного треугольника ABC, проведённых из точек A, B и C, через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке Q. Докажите, что $PQ \perp OM$, где O и M — центр описанной окружности и точка пересечения медиан треугольника ABC соответственно.

7. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 соответственно. Оказалось, что

$$AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2.$$

Докажите, что середины этих шести отрезков лежат на одной окружности.

8. В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Отрезок A_1D пересекает окружность, описанную около треугольника AB_1C_1, в точке K. Докажите, что прямые AK и BC параллельны.