Многочлены и непрерывность

Наивное определение. Функция называется *непрерывной*, если при «небольших» изменениях аргумента значение функции также меняется на «небольшую» величину. Многочлен является простейшим примером непрерывной функции.

Теорема о промежуточном значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует точка c, такая что $a < c < b$ и $f(c) = 0$.

1. Докажите, что многочлен нечётной степени имеет вещественный корень.

2. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x + 1) = Q(x - 1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

3. **(а)** Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет корней.

(б) Пусть многочлен $P(x)$ имеет нечётную степень. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

4. Сколько корней имеет многочлен

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (x-1)(x-2)\dots(x-i+1)(x-i-1)\dots(x-n)\ ?$$

5. Приведенные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ девятой степени таковы, что $P(x) \geqslant Q(x)$, причем при $x = 1, 2, \dots, 5$ неравенство обращается в равенство. Докажите, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны.

6. Известно, что многочлен имеет по крайней мере один вещественный корень. Докажите, что из него можно выкидывать мономы по одному, так что на каждом шаге у многочлена будет корень, а в конце останется только свободный коэффициент.

7. Поль и Полина по очереди заполняют пустые квадратики в многочлене

$$x^{2n} + \square\, x^{2n-1} + \square\, x^{2n-2} + \ldots + \square\, x + 1.$$

Полина хочет добиться того, что многочлен будет иметь хотя бы один корень. Поль же хочет ей помешать. Кто победит при правильной игре, если Поль ходит первым?