Признаки описанности

Для четырёх прямых общего положения существует две области, в которые можно вписать окружность, касающуюся всех четырёх прямых. Зададимся вопросом, какие условия должны выполняться, чтобы окружности действительно существовали.

Для области 1 на рисунке 1 ответ хорошо известен — окружность можно вписать тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

Утверждение. Для области 2 на рисунке 1 существует окружность, касающаяся всех четырёх прямых, тогда и только тогда, когда $AB + BC = AD + DC$.

Но можно выделить и другие четырёхугольники, стороны которых лежат на этих четырёх прямых (рисунки 2 и 3).

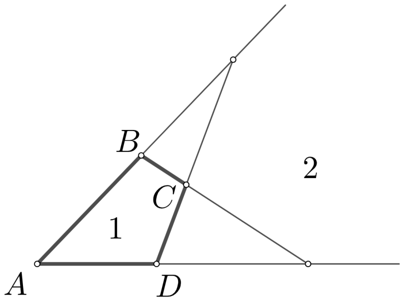

Рис. 1: стандартный случай

Утверждение. Для области 1 на рисунке 2 существует окружность, касающаяся всех четырёх прямых, тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

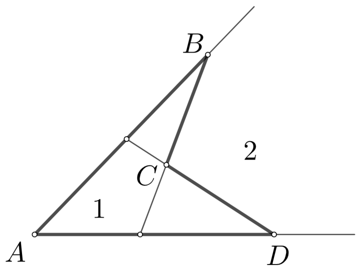

Рис. 2: невыпуклый

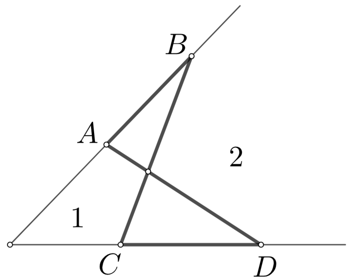

Рис. 3: самопересекающийся

1. **(а)** Докажите, что для области 2 на рисунке 2 существует окружность, касающаяся всех четырёх прямых, тогда и только тогда, когда $AB+BC = AD+CD$.
(б) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для областей 1 и 2 на рисунке 3.

2. На сторонах BC и CD описанного четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки X и Y соответственно, Z — точка пересечения отрезков DX и BY. Оказалось, что четырёхугольник $ABZD$ — описанный. Докажите, что четырёхугольник $CXZY$ также описанный.

3. Прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках P и Q. Через точки P и Q проведены лучи, которые разбивают четырёхугольник на четыре четырёхугольника. Оказалось, что два четырёхугольника, примыкающие к противоположным вершинам исходного четырёхугольника, описанные. Докажите, что $ABCD$ является описанным.

4. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке X. Оказалось, что четырёхугольники BA_1XC_1 и CA_1XB_1 описанные. Докажите, что четырёхугольник AB_1XC_1 также описанный.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная ℓ к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.
(а) Решите задачу, когда ℓ и BC не параллельны.
(б) Докажите, что когда ℓ и BC параллельны, то длина отрезка AY такая же.

6. Окружность с центром I касается сторон AB, BC, AC неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Окружности ω_b и ω_c вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C, отличная от IA_1, проходит через точку A.

7. Пусть в треугольнике ABC из вершины A провели отрезки AD и AE к стороне BC. Прямая ℓ — общая внешняя касательная вписанных окружностей треугольников BAD и EAC, не совпадающая с прямой BC, а m — общая внешняя касательная вписанных окружностей треугольников BAE и DAC, не совпадающая с BC. Докажите, что прямые ℓ и m пересекаются на прямой BC.

8. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB, T — произвольная точка стороны BC, отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники BMT, MTA, ATC, касаются одной прямой.