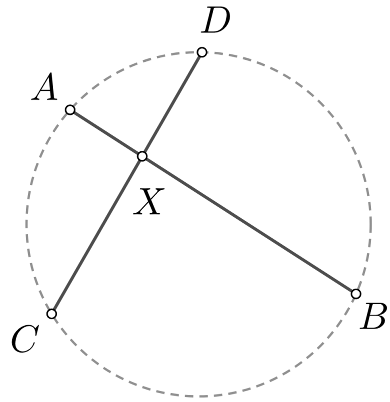
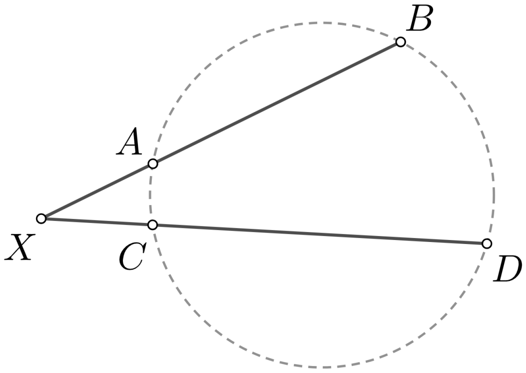
Степень точки

Определение. *Степенью* точки X относительно окружности ω называется величина $\mathrm{Pow}(X,\omega) = d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки X до центра окружности, а R — радиус окружности.

Если прямая, проходящая через точку X, пересекает ω в точках A и B, то степень точки равна $XA \cdot XB$, взятая со знаком «$+$», если X лежит вне ω, и со знаком «$-$», если внутри.





Утверждение. Для обеих картинок сверху точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $XA \cdot XB = XC \cdot XD$.

Аналогичные утверждения верны, если секущую заменить на касательную.

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle CAB = \angle DBC$ и $\angle BCA = \angle CDB$. Обозначим через O его точку пересечения диагоналей. Докажите, что длины касательных из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD равны.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Описанные окружности треугольников ABD и ACD пересекают отрезки AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BF = CE$.

3. Точка D — середина стороны BC треугольника ABC, точка E — середина отрезка DC. Описанная окружность треугольника ABE вторично пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $\angle BAD = \angle DFE$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P. Известно, что $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

5. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC, выбраны такие точки, что соответствующие стороны (т. е. стороны AC и AB) видны из них под прямым углом. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.

6. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B, лежащая вне ω. Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

7. Окружности Ω и ω касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC окружности Ω касается окружности ω в точке D. Докажите, что середина отрезка AD, центр ω, точки B и C лежат на одной окружности.

8. Противоположные стороны четырёхугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если касательные к окружности, проведённые из точек P и Q, равны a и b соответственно.