Радикальные оси — 1

Определение. *Степенью* точки X относительно окружности ω называется величина $\mathrm{Pow}(X,\omega) = d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки X до центра окружности, а R — радиус окружности.

Для двух окружностей ω_1 и ω_2 с разными центрами ГМТ X таких, что $\mathrm{Pow}(X,\omega_1) = \mathrm{Pow}(X,\omega_2)$ —- прямая, перпендикулярная линии центров. Она называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2.

Утверждение. Дано три окружности, для каждой пары окружностей рассмотрим радикальную ось. Тогда эти 3 радикальных оси либо совпадают, либо параллельны, либо пересекаются в одной точке — в *радикальном центре.*

1. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

2. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

3. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 соответственно. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, $C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что все 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

5. **(а)** На прямых, содержащих стороны AC, AB треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника имеет одинаковую степень относительно окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметрах.
   (б) Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*), ортоцентры треугольников AED, BEC, DFC, AFB лежат на одной прямой (*прямая*

Обера), причем эти прямые перпендикулярны.

6. Пусть B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Отрезок A_1D пересекает окружность, описанную около треугольника AB_1C_1, в точке K. Докажите, что прямые AK и BC параллельны.

8. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 соответственно. Оказалось, что

$$AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2.$$

Докажите, что середины этих шести отрезков лежат на одной окружности.